Γ΄ Λυκείου

9 Απριλίου 2011

Θεωρητικό μέρος

Θέμα 1ο

Α. Η ακτινοβολία Cherenkov οφείλεται σε ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη από εκείνη του φωτός, σε ένα μέσον όπως ένα αέριο. Σε κάθε στιγμή, το ηλεκτρόνιο μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο το οποίο εκπέμπει σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Υποθέστε ότι το ηλεκτρόνιο δεν επιβραδύνεται και βρείτε:

i. Το σχήμα του μετώπου του κύματος κάποια χρονική στιγμή. Το μέτωπο ενός κύματος κάποια στιγμή είναι το σύνολο των σημείων στα οποία μόλις φτάνει η διαταραχή τη στιγμή αυτή.

ii. Τη σχέση του με την ταχύτητα v του ηλεκτρονίου, του δείκτη διάθλασης n του μέσου και της ταχύτητας του φωτός στο κενό c_0.

Β. Ένα σωματίδιο μάζας m και αρχικής ταχύτητας v_0 συγκρούεται με ένα άλλο σωματίδιο μάζας $2m$ που αρχικά ηρεμεί. Αποτέλεσμα αυτής της κρούσης, είναι να κινηθεί το προσπίπτον σωματίδιο με ταχύτητα $\frac{\sqrt{5}}{3}v_0$ υπό γωνία θ_1 σε σχέση με την αρχική του κατεύθυνση για την οποία ισχύει εφθ_1=2.

i. Σχεδιάστε τα σωματίδια αμέσως μετά την κρούση, σημειώνοντας καθαρά την ταχύτητα v_2 και την κατεύθυνση θ_2 του βαρύτερου σωματιδίου-στόχου μετά την κρούση.

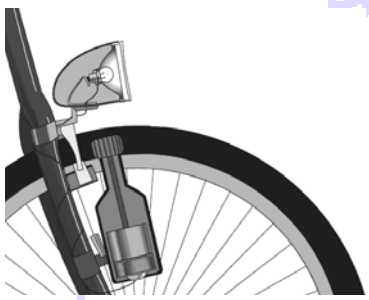
ii. Ποια είναι η τιμή της γωνίας θ_2;

iii. Ποια είναι η τιμή της ταχύτητας του βαρύτερου σωματιδίου v_2;

iv. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η κρούση ήταν ελαστική;

Θέμα 2ο

Α. Το μπροστινό φανάρι ενός ποδηλάτου τροφοδοτείται συνήθως από ένα δυναμό. Το δυναμό είναι μια ηλεκτρική γεννήτρια της οποίας ο ρώτορας είναι ένα πηνίο που περιστρέφεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο ***B*** λόγω της επαφής ενός στελέχους με το πλαϊνό μέρος του τροχού του ποδηλάτου όπως φαίνεται στην εικόνα 1. Σε ένα τέτοιο δυναμό το πηνίο έχει 125 σπείρες που η καθεμιά έχει εμβαδόν 0,0010 m^2, και το μαγνητικό πεδίο είναι 0,080 T. Η ακτίνα του στελέχους του δυναμό είναι 1,25 cm.



Η διάμετρος του τροχού είναι 66 cm. Αν ο λαμπτήρας του φαναριού χρειάζεται μέση ηλεκτρική ισχύ 5 W και πλάτος τάσης 4 V, για να φωτοβολεί αξιοπρεπώς:

i. Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία πρέπει να κινείται το ποδήλατο, θεωρώντας ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης οι τροχοί δεν ολισθαίνουν και ότι το στέλεχος του δυναμό ακουμπά το λάστιχο πολύ κοντά στην άκρη του τροχού.

ii. Υπολογίστε τη μέση ροπή από τον τροχό στο στέλεχος, για να λειτουργεί ο λαμπτήρας με την απαιτούμενη ηλεκτρική ισχύ. Θεωρείστε αμελητέες τις απώλειες λόγω τριβής και λόγω αντίστασης του πηνίου.

iii. Ποιο είναι το πλάτος του ρεύματος που επάγεται στο πηνίο κάτω από αυτές τις συνθήκες;

iv. Αν ο λαμπτήρας ικανοποιεί το νόμο του Ohm και η αντίστασή του είναι σταθερή, πόσο θα αυξηθεί η ισχύς στο λαμπτήρα όταν τριπλασιαστεί η ταχύτητα του ποδηλάτου;

Β. Ορίζουμε ως ένταση *I* ακτινοβολίας, τον ρυθμό της μεταφερόμενης ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης της ακτινοβολίας. Μια δέσμη μονοχρωματικού φωτός laser με ένταση I=0,20 W/cm^2 προσπίπτει με γωνία προσπτώσεως 45^0 σε επίπεδη επιφάνεια με συντελεστή ανακλαστικότητας 1, δηλαδή ανακλά το 100% των φωτονίων τα οποία προσπίπτουν σ' αυτήν. Κάθε φωτόνιο της ακτινοβολίας έχει ορμή $p=E/c$, όπου E η ενέργεια ενός φωτονίου και $c=3\cdot10^8$ m/s η ταχύτητα του φωτός στο κενό ή τον αέρα. Να βρείτε την πίεση στην επιφάνεια από τη δέσμη laser. Δίνεται η σταθερά του Planck $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ J$\cdot$s

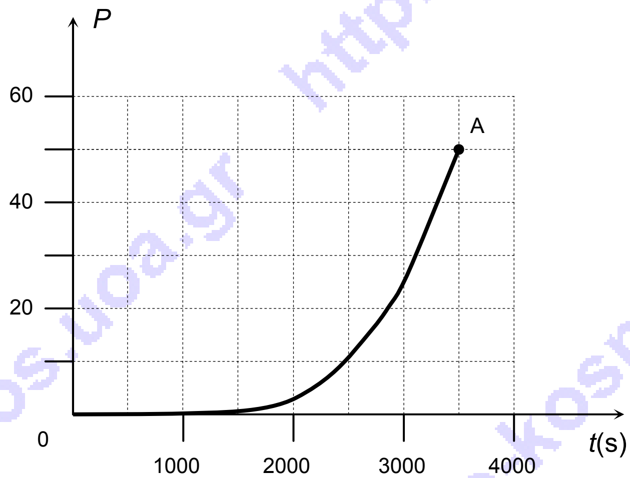
Θέμα 3^o

Α. Ένας καταγραφέας πέφτει κατακόρυφα προς την επιφάνεια ενός πλανήτη με σταθερή ταχύτητα *v*. Οι αισθητήρες του καταγραφέα μετρούν την εξωτερική πίεση *P* σε πραγματικό χρόνο και μεταδίδουν δεδομένα στο μητρικό σκάφος το οποίο έχει τεθεί σε τροχιά γύρω από τον πλανήτη. Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται η πίεση σε σχέση με το χρόνο, μέχρι ο καταγραφέας να φτάσει στην επιφάνεια του πλανήτη. Οι μονάδες της πίεσης είναι αυθαίρετες και ο χρόνος είναι σε δευτερόλεπτα.

Μόλις ο καταγραφέας προσγειωθεί στον πλανήτη μετρά τη θερμοκρασία της επιφάνειας T=700 K, και την επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας g=10 m/s^2.
Δίνεται ότι η στοιχειώδης μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης σε σχέση με τη στοιχειώδη μεταβολή του ύψους είναι:

$$\Delta P=-\rho g\Delta h,$$

όπου ρ η πυκνότητα της ατμόσφαιρας. Επειδή η μεταβολή του ύψους είναι στοιχειώδης, δηλαδή αρκετά μικρή, η πυκνότητα είναι σταθερή κατά τη διάρκεια αυτής της στοιχειώδους μεταβολής του ύψους Δh.



i. Βρείτε την ταχύτητα καθόδου *v* του καταγραφέα, αν είναι γνωστό ότι η ατμόσφαιρα του πλανήτη αποτελείται από διοξείδιο του άνθρακα (CO_2) με γραμμομοριακή μάζα M=44 g/mol και η σταθερά των ιδανικών αερίων είναι R=8,31 J/mol K.

ii. Ποια είναι η θερμοκρασία T_h της ατμόσφαιρας σε ύψος h=15Km πάνω από την επιφάνεια του πλανήτη;

Β. Σύμφωνα με μια από τις κοσμολογικές θεωρίες, οι αστέρες δημιουργήθηκαν από διαστρική σκόνη με βαρυτική συσσώρευση. Η πυκνότητα της διαστρικής σκόνης σε ένα νεφέλωμα είναι $\rho=2\cdot10^{-17}$ kg/m^3, η σταθερά της παγκόσμιας έλξης είναι $G=6{,}67\ 10^{-11}$Nm^2/kg^2. Τα σωμάτια της σκόνης δεν επικάθονται το ένα στο άλλο κατά τη διάρκεια της συσσώρευσης και το νέφος της διαστρικής σκόνης είναι σφαιρικό και ομογενές.

i. Υποθέστε ότι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να σχηματιστεί ένας αστέρας σύμφωνα με τη θεωρία αυτή εξαρτάται μόνο από τα ρ, G και χρησιμοποιώντας τη διαστατική ανάλυση κάντε μια πρώτη εκτίμηση αυτού του χρονικού διαστήματος.

ii. Σύμφωνα με το θεώρημα του κελύφους του Νεύτωνα, ένα σφαιρικό κέλυφος δεν ασκεί βαρυτική δύναμη στο εσωτερικό του, ενώ ένα σφαιρικό σώμα ασκεί στο εξωτερικό του βαρυτική δύναμη ίση με αυτή που θα ασκούσε αν ήταν όλη η μάζα του συγκεντρωμένη σε ένα σημείο στο κέντρο της σφαίρας. Θεωρείστε ένα σωμάτιο σκόνης σε απόσταση R από το κέντρο του σφαιρικού νεφελώματος και υπολογίστε την περίοδο της κυκλικής τροχιάς που θα μπορούσε να εκτελεί υπό την επίδραση της βαρυτικής έλξης από το νεφέλωμα αν δεν γινόταν η συσσώρευση.

iii. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Κέπλερ, το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς του κάθε πλανήτη είναι ανάλογο με τον κύβο του μήκους του μεγάλου ημιάξονα της έλλειψης που διαγράφει (στην περίπτωση που η έλλειψη τείνει σε κύκλο ο μεγάλος ημιάξονας είναι η ακτίνα του κύκλου). Θεωρείστε ότι η πτώση του σωματίου σκόνης προς το κέντρο του νεφελώματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια πολύ επιμήκης έλλειψη, με μεγάλο ημιάξονα $\frac{R}{2}$.

Εφαρμόστε τον τρίτο νόμο του Κέπλερ για να συσχετίσετε την περίοδο της ελλειπτικής τροχιάς με εκείνη της κυκλικής του προηγούμενου ερωτήματος.

iv. Κάντε μια ακριβέστερη εκτίμηση του χρονικού διαστήματος που χρειάζεται για να σχηματιστεί ένας αστέρας από το νέφος της σκόνης σύμφωνα με τη θεωρία αυτή.

Πειραματικό μέρος

Μια ηχητική πηγή εκπέμπει αρμονικό ήχο συχνότητας f_0. Η πηγή αφήνεται τη χρονική στιγμή $t=0$ να πέσει ελεύθερα από ύψος h πάνω από ένα δέκτη ο οποίος καταγράφει τη συχνότητα του ήχου που λαμβάνει σε κάθε χρονική στιγμή. Κάποιες από τις τιμές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

t (s)	2	4	6	8	10
f (Hz)	581	619	665	723	800

Η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας είναι $g=9{,}8$ m/s^2 και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα $v_{ηχ}=340$ m/s. Αγνοείστε την αντίσταση του αέρα.

i. Βρείτε μια έκφραση για τη μεταβολή της απόστασης της πηγής από το δέκτη σε σχέση με το χρόνο.

ii. Τη στιγμή t ο παρατηρητής ακούει την εκπομπή της πηγής που αντιστοιχεί στη στιγμή $t΄$. Βρείτε μια έκφραση για τη χρονική στιγμή $t΄$ ως συνάρτηση των t, $v_{ηχ}$, g,h.

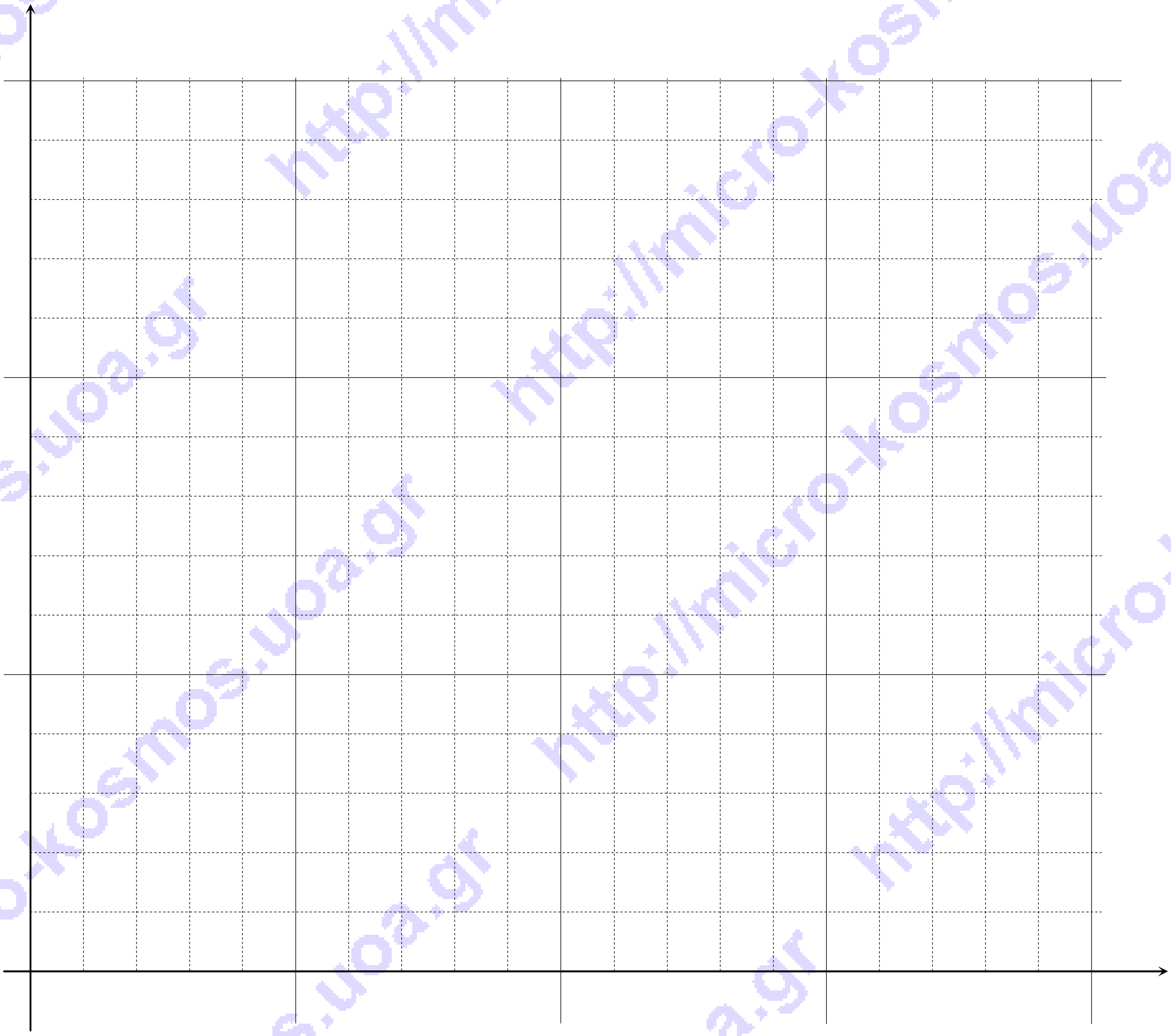
iii. Καθορίστε τη συχνότητα που καταγράφεται από το δέκτη τη στιγμή t σε σχέση με τα f_0, g, h και $v_{ηχ}$.

iv. Επαληθεύστε γραφικά ότι το αποτέλεσμά σας είναι συνεπές με τα δεδομένα του πίνακα.

v. Από ποιο ύψος h αφέθηκε η πηγή;

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε το γράφημα σ' αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες τιτλοδοτήστε συμπεριλάβετε και τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα.



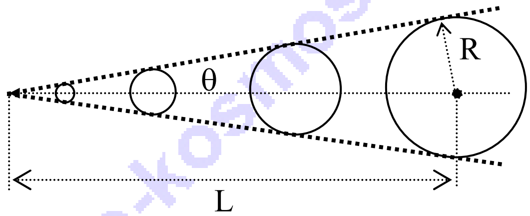
Καλή επιτυχία

Συνοπτικές λύσεις

Θεωρητικό μέρος

Θέμα 1^{ο}:

Α.



i. Μια σειρά από σφαίρες η οποίες σχηματίζουν ένα κωνικό μέτωπο κύματος το οποίο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

ii. Σε χρόνο t η ακτίνα του σφαιρικού κύματος που εκπέμφθηκε τη χρονική στιγμή t=0 είναι: $R=\frac{c_0 t}{n}$ και το ηλεκτρόνιο έχει ταξιδέψει κατά $L=vt$ έτσι: $\eta\mu\theta=\frac{R}{L}=\frac{c_0}{nv}$

Β.

i.

ii. ΑΔΟ χ : $mv_0=m\frac{\sqrt{5}}{3}v_0\text{συν}\theta_1+2mv_2\text{συν}\theta_2$

ΑΔΟ ψ: $0=m\frac{\sqrt{5}}{3}v_0\text{ημ}\theta_1+2mv_2\text{ημ}\theta_2$

$\text{ημ}\theta_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\text{συν}\theta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$

οπότε $0=-\frac{2}{3}v_0+2v_2\text{συν}\theta_2$

$0=+\frac{2}{3}v_0-2v_2\text{ημ}\theta_2$

από τις παραπάνω έχουμε: $\text{ημ}\theta_2=\text{συν}\theta_2$ δηλαδή $\theta_2=45^0$

iii. $v_2=v_0\frac{1}{3\text{ημ}\theta_2}=\frac{\sqrt{2}}{3}v_0$

iv. $K=K_1+K_2=\frac{1}{2}m(\frac{\sqrt{5}}{3}v_0)^2+\frac{1}{2}2m(\frac{\sqrt{2}}{3}v_0)^2$ από την οποία

$K=\frac{1}{2}mv_0^2$ Συνεπώς η κρούση ήταν ελαστική.

Θέμα 2ο:

Α.

i. Αφού το στέλεχος του δυναμό ακουμπά το λάστιχο πολύ κοντά στην άκρη του τροχού, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εφαπτομενική ταχύτητα v των σημείων του στελέχους είναι ίση με την ταχύτητα του ποδηλάτου.

Έτσι $v = \omega r$ (1) όπου r είναι η ακτίνα του στελέχους.

Από το νόμο του Faraday στο περιστρεφόμενο πηνίο η ΗΕΔ από επαγωγή θα είναι: $E=NB\omega A$ημωt και το πλάτος της $E_{max}=NB\omega A$ (2). Από την (1) και την (2) έχουμε:

$$v=\frac{rE}{NBA}=\frac{(1{,}25\cdot10^{-2}\,\mathrm{m})(4{,}0\mathrm{V})}{(125)(0{,}080\mathrm{T})(1{,}0\cdot10^{-3}m^2)}=5{,}0m/s$$

ii. $\tau=\frac{P}{\omega}$, όπου P η μέση μηχανική ισχύς. Αφού είναι αμελητέες οι απώλειες λόγω τριβής και λόγω αντίστασης του πηνίου, η P θα είναι και η μέση ηλεκτρική ισχύς του δυναμό. Έτσι:

$$\tau=\frac{rP}{v}=\frac{(1{,}25\cdot10^{-2}m)(5{,}0W)}{5{,}0m/s}=1{,}25\cdot10^{-2}N\cdot m$$

iii. Η μέγιστη στιγμιαία ηλεκτρική ισχύς είναι: $P_{\max}=E_{\max}I_{\max}=2P=10W$ Έτσι:

$$I_{\max}=\frac{P_{\max}}{E_{\max}}=\frac{(10W)}{(4{,}0V)}=2{,}5A$$

iv. Αφού ο λαμπτήρας ικανοποιεί το νόμο του Ohm και η αντίστασή του είναι σταθερή, η ισχύς του θα είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ενεργού τάσης. Επειδή όμως η ενεργός τάση είναι ανάλογη της ταχύτητας ή ισχύς θα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας. Συνεπώς όταν τριπλασιαστεί η ταχύτητα του ποδηλάτου θα εννεαπλασιαστεί η προσφερόμενη σε αυτόν ισχύς. Ο λαμπτήρας μάλλον θα καεί.

Β. Η ένταση της ακτινοβολίας είναι: $I=\frac{NE}{\Delta t A_\delta}$ (1) όπου N ο αριθμός των φωτονίων που εκπέμπονται σε χρόνο Δt και A_δ το εμβαδόν της κάθετης διατομής της δέσμης. Η αλληλεπίδραση μεταξύ φωτονίου και επιφάνειας στην περίπτωσή μας όπου ο συντελεστής ανακλαστικότητας είναι 1, είναι ανάλογη με μια ελαστική κρούση. Στον άξονα x η ορμή των προσπιπτόντων φωτονίων σε χρόνο Δt θα είναι: $p_x=\frac{NE}{c}$συνθ (2).

Η (2) με τη βοήθεια της (1) δίνει: $p_x=\frac{IA_\delta\Delta t}{c}$συν$\theta$ (3)

Η μεταβολή της ορμής στον άξονα x θα είναι: $\Delta p_x=-2p_x$ δηλαδή $\Delta p_x=-2\frac{IA_\delta\Delta t}{c}$συν$\theta$ (4)

Η κάθετη δύναμη στην επιφάνεια θα είναι $F_x=\frac{\Delta p_x}{\Delta t}$ (5) και η πίεση $P=\frac{F_x}{A}$ (6)

Όπου Α το εμβαδόν της επιφάνειας το οποίο φωτίζεται από τη δέσμη laser και ισχύει ότι:

$$A_\delta=A\text{συν}\theta \quad (7)$$

Οπότε από τις (4), (5) , (6) η πίεση θα είναι:

$P = 2\dfrac{IA_\delta}{cA}\sigma\upsilon\nu\theta$ και με τη βοήθεια της (7) $P = 2\dfrac{I}{c}\sigma\upsilon\nu^2\theta$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$P = 6{,}7 \cdot 10^{-6}$ Pa

Θέμα 3^{o}:

Α.

i. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε: $\Delta P = -\rho g \Delta h$ (1) . όπου ρ η πυκνότητα του CO_2, και Δh αρκετά μικρό ώστε η πυκνότητα ρ να είναι σταθερή. Από την καταστατική εξίσωση:

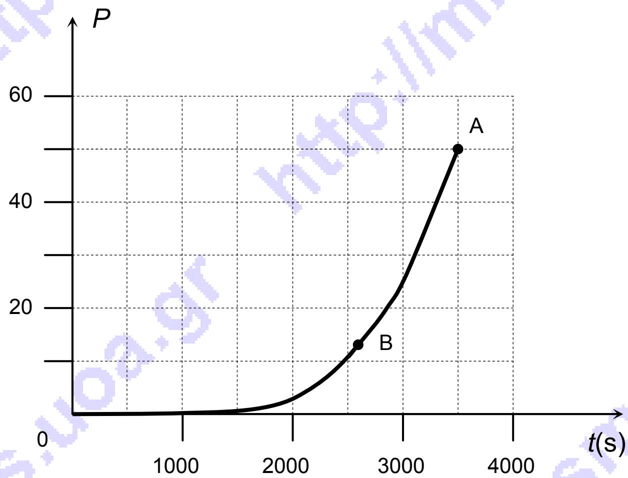
$P = \dfrac{\rho}{M}RT$ (2) όπου T η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου στην ίδια περιοχή στην οποία αναφέρεται το ΔP. Αφού ο καταγραφέας κατέρχεται με σταθερή ταχύτητα v θα ισχύει: $\Delta h = -v\Delta t$ (3)

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι: $\dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{gMv\Delta t}{RT}$ και $v = \dfrac{RT}{gM}\dfrac{\Delta P}{P\Delta t}$ (4)

Είναι φανερό ότι αν γνωρίζουμε το $\dfrac{\Delta P}{\Delta t}$ από την κλίση στο σημείο Α του γραφήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε το v. Επίσης οι μονάδες τις πίεσης δεν έχουν σημασία επειδή στη σχέση (4) υπεισέρχεται ο λόγος $\dfrac{\Delta P}{P}$. Έχουμε λοιπόν:

$$v = \frac{8310 \cdot 700}{10 \cdot 44}\,\frac{50}{50 \cdot (3500 - 2600)} = 15{,}86 \approx 16 m/s$$

(5)



ii. Αφού v=16m/s, θα χρειαστεί χρόνος $t = \dfrac{h}{v} \approx 940 s$ για να φτάσει ο καταγραφέας στην επιφάνεια του πλανήτη από ύψος h=15 km. Ο καταγραφέας ήταν σε ύψος h=15km τη χρονική στιγμή t_B=2560 s, όπου η πίεση είναι $P_B \approx 12$ (σημείο Β του γραφήματος).

Εκτιμώντας το $\dfrac{\Delta P}{\Delta t P}$, στο σημείο αυτό, λύνοντας την (4) ως προς τη θερμοκρασία και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$T_h = \frac{gMv}{R}\frac{P\Delta t}{\Delta P} = \frac{10 \cdot 44 \cdot 16}{8310}\,\frac{12 \cdot (4000 - 2000)}{41{,}2} = 493 \approx 490 K \quad (6)$$

Β.

i. Με την υπόθεση ότι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να σχηματιστεί ένας αστέρας σύμφωνα με τη θεωρία αυτή εξαρτάται μόνο από τα ρ, G θα έχουμε:

$t = G^{\alpha}\rho^{\beta}$, όπου α, β οι συντελεστές τους οποίους θα πρέπει να καθορίσουμε.

Αφού [*t*]=*T*, [*G*]=$M^{-1}L^3T^{-2}$ και [*ρ*]=ML^{-3} έχουμε: *α*=*β*=$-\frac{1}{2}$. Έτσι: $t = k\frac{1}{\sqrt{G\rho}}$ (1)

Όπου *k* ένας αριθμητικός αδιάστατος συντελεστής. Υποθέτοντας ότι *k*=1 παίρνουμε:

$t \approx 0{,}3\cdot 10^{14}\,s$ δηλαδή περίπου ένα εκατομμύριο έτη.

ii. Η βαρυτική έλξη στη σκόνη με μάζα *m* από το νέφος θα οφείλεται στην μάζα *M* του νέφους εντός της σφαίρας με ακτίνα *R* και θα παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Θα ισχύει:

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \quad (2) \qquad \text{και} \qquad M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε $v = 2R\sqrt{\frac{r\pi G}{3}}$ (4)

Η περίοδος της κυκλικής τροχιάς είναι $T_{\mathrm{K}} = \frac{2\pi R}{v}$ (5)

Η (5) με τη βοήθεια της (4) δίνει $T_{\mathrm{K}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$ (6)

iii. Από τον τρίτο νόμο του Κέπλερ έχουμε: $\frac{T_{\mathrm{K}}^2}{T_{\mathrm{E}}^2} = \frac{R^3}{(\frac{R}{2})^3}$ από την οποία: $T_{\mathrm{E}} = \frac{T_{\mathrm{K}}}{2^{\frac{3}{2}}}$ (7)

iv. Η (7) με τη βοήθεια της (6) δίνει: $T_{\mathrm{E}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8\rho G}}$ (8) Παρατηρούμε ότι περίοδος της ελλειπτικής τροχιάς δεν εξαρτάται από την ακτίνα *R*.

Το χρονικό διάστημα *t* που χρειάζεται για να σχηματιστεί ο αστέρας, θα είναι $t = \frac{T_{\mathrm{E}}}{2} = 0{,}15\cdot 10^{14}\,s$ δηλαδή περίπου μισό εκατομμύριο έτη.

Πειραματικό μέρος

i. Την χρονική στιγμή *t* η πηγή θα απέχει από το δέκτη $y = h - \frac{1}{2}gt^2$ (1)

ii. Τότε η ταχύτητα της πηγής θα έχει μέτρο v_s=*gt* ενώ ο ήχος θα χρειάζεται χρόνο

$$\delta t = \frac{y}{v_{\eta\chi}} \quad (2)$$ για να φτάσει στον δέκτη.

Τη στιγμή *t* ο δέκτης λαμβάνει την εκπομπή της πηγής η οποία αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή *t΄*=*t*-δ*t* (3). Η (3) με τη βοήθεια των (2) και (1) δίνει:

$$t' = t - \frac{h}{v_{\eta\chi}} + \frac{g(t')^2}{2v_{\eta\chi}} \quad \text{ή} \quad \frac{g}{2}(t')^2 - v_{\eta\chi}t' + (v_{\eta\chi}t - h) = 0 \quad \text{οπότε:} \quad t' = \frac{v_{\eta\chi} \pm \sqrt{v_{\eta\chi}^2 + 2gh - 2gv_{\eta\chi}t}}{g} \quad (4)$$

iii. Η ταχύτητα που είχε η πηγή όταν εξέπεμψε τον ήχο που άκουσε ο παρατηρητής τη στιγμή *t* θα έχει μέτρο: $v_s = gt'$ δηλαδή $v_s = v_{\eta\chi} \pm \sqrt{v_{\eta\chi}^2 + 2gh - 2gv_{\eta\chi}}$ (5)

Η συχνότητα που καταγράφεται από το δέκτη τη στιγμή t θα είναι:

$f = f_0 \dfrac{v_{\eta\chi}}{v_{\eta\chi} - v_s}$ η οποία από την (5) δίνει: $f = f_0 \dfrac{v_{\eta\chi}}{\sqrt{v_{\eta\chi}^2 + 2gh - 2gv_{\eta\chi}t}}$ (6)

iv. Η (6) γίνεται: $\dfrac{1}{f^2} = \dfrac{1}{f_0^2}\dfrac{v_{\eta\chi}^2 + 2gh - 2gv_{\eta\chi}t}{v_{\eta\chi}^2}$ από την οποία έχουμε:

$\dfrac{1}{f^2} = \dfrac{1}{f_0^2}(1 + \dfrac{2gh}{v_{\eta\chi}^2} - \dfrac{2gt}{v_{\eta\chi}})$ και τελικά $\dfrac{1}{f^2} = \dfrac{1}{f_0^2}(1 + \dfrac{2gh}{v_{\eta\chi}^2}) - \dfrac{2gt}{v_{\eta\chi} f_0^2}$ (7)

Για να επαληθεύσουμε γραφικά ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι συνεπές με τα δεδομένα του πίνακα κάνουμε το γράφημα του $\dfrac{1}{f^2}$ σε σχέση με το χρόνο *t* και θα πρέπει να είναι ευθεία.

v. Από την κλίση η οποία είναι $-\dfrac{2g}{v_{\eta\chi} f_0^2}$ βρίσκουμε την f_0=574Hz και από την τομή της ευθείας με τον άξονα $\dfrac{1}{f^2}$ έχουμε: $\dfrac{1}{f_0^2}(1 + \dfrac{2gh}{v_{\eta\chi}^2}) = 3{,}31 \cdot 10^{-6} s^2$ και βρίσκουμε το ύψος *h*=533 m από το οποίο αφέθηκε η πηγή.