Γ΄ Λυκείου

29 Μαρτίου 2014

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Η **επεξεργασία των θεμάτων** θα γίνει γραπτώς σε **χαρτί** Α4 ή σε **Τετράδιο** το οποίο θα σας δοθεί και το οποίο θα παραδώσετε στο τέλος της εξέτασης. Εκεί θα σχεδιάσετε και όσα **γραφήματα** ζητούνται στο **Θεωρητικό Μέρος**.

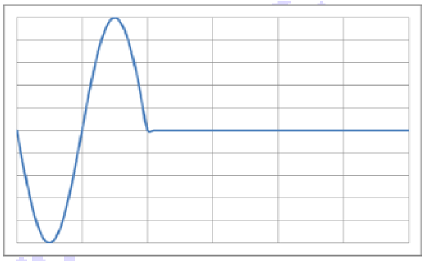
2. Τα **γραφήματα** του **Πειραματικού Μέρους** θα τα σχεδιάσετε *κατά προτεραιότητα* στο **μιλιμετρικό χαρτί** που συνοδεύει τις εκφωνήσεις.

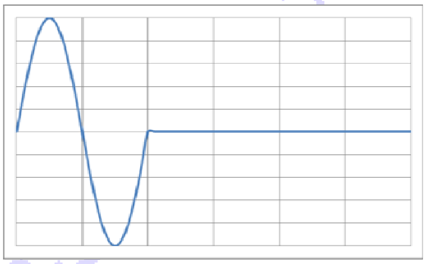
3. Τα **τελικά αποτελέσματα** και οι **απαντήσεις** τόσο του **Θεωρητικού** όσο και του **Πειραματικού Μέρους** θα πρέπει *οπωσδήποτε* να συμπληρωθούν και στο **"Φύλλο Απαντήσεων"** που θα σας δοθεί μαζί με τις εκφωνήσεις των θεμάτων και θα παραδώσετε, επίσης, στο τέλος της εξέτασης.

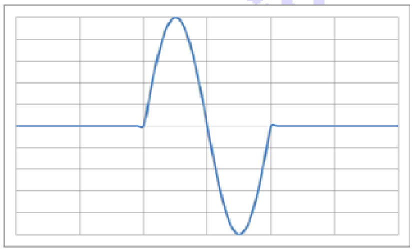
Θεωρητικό Μέρος

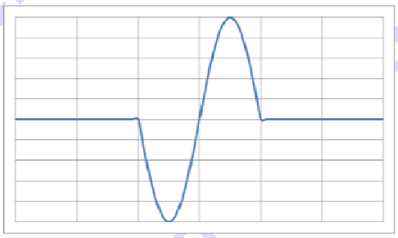
Θέμα 1^{ο}

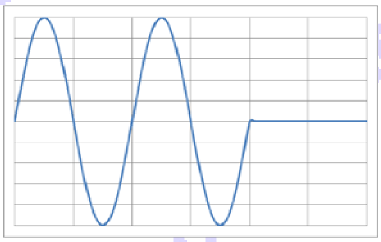
Α. Έστω ότι στη θέση 0 γραμμικού ελαστικού μέσου δημιουργούνται ταλαντώσεις που περιγράφονται από την εξίσωση $y=A\eta\mu(\omega t)$, οπότε (ανάλογα με τη διάρκεια της διαταραχής) δημιουργείται σειρά παλμών ή κύμα. Σας δίνονται τα επόμενα οκτώ γραφήματα που παριστάνουν την απομάκρυνση y σε συνάρτηση είτε με το *t* είτε με το *x*. Γνωρίζετε ότι το αριστερότερο σημείο του οριζόντιου άξονα αντιστοιχεί σε τιμή 0. Για όσα από τα γραφήματα αυτά είναι αποδεκτά: **i)** να καθορίσετε το φυσικό μέγεθος του οριζόντιου άξονα (*t* ή *x*), **ii)** να προσδιορίσετε την τιμή του άλλου μεγέθους (*x* ή *t* αντίστοιχα), **iii)** να περιγράψετε τι παριστάνει το γράφημα με όσες περισσότερες λεπτομέρειες προκύπτουν από αυτό.

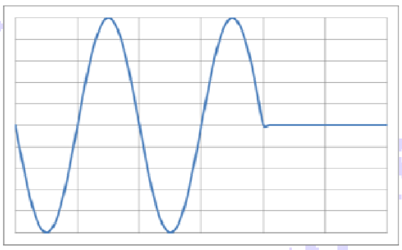

(α)

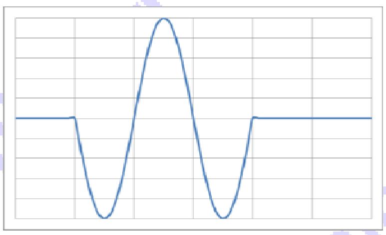

(β)

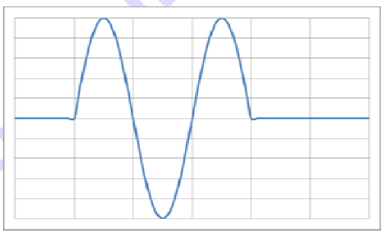

(γ)


(δ)


(ε)


(στ)

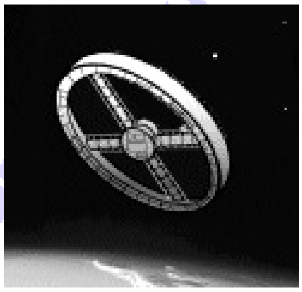

(ζ)


(η)

Β. Στα σημεία Α και Β επίπεδου ελαστικού μέσου βρίσκονται δύο πηγές $Π_1$ και $Π_2$ που δημιουργούν Γραμμικά Αρμονικά Κύματα. Μετά τη χρονική στιγμή που έχει ξεκινήσει η ταλάντωση όλων των σημείων του ελαστικού μέσου, παρατηρούμε ότι το σημείο Μ που βρίσκεται στο μέσο της ΑΒ, παραμένει διαρκώς ακίνητο. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

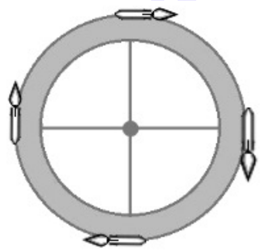
Β1. Τα πλάτη των πηγών είναι ίσα.
Β2. Οι δύο πηγές παράγουν κύματα με λ>ΑΒ.
Β3. Η μία πηγή παράγει εγκάρσιο κύμα και η άλλη διάμηκες.
Β4. Οι πηγές παρουσιάζουν διαφορά φάσης π.
Β5. Οι πηγές έχουν διαφορετικές συχνότητες.

Θέμα 2^{ο}



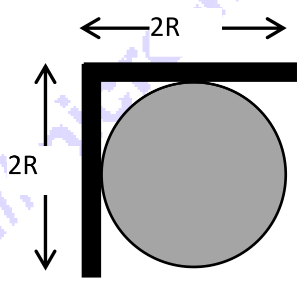
Α. Ένας περιστρεφόμενος διαστημικός σταθμός είναι μια υποθετική πρόταση για τη δημιουργία «τεχνητής βαρύτητας» σε χώρο του Διαστήματος που απέχει πολύ από κάποιο βαρυτικό σώμα. Ένας τέτοιος σταθμός θα είναι ένας τεράστιος τροχός, περιστρεφόμενος γύρω από τον άξονά του, στο εσωτερικό της περιφέρειας του οποίου θα εργάζονται οι αστροναύτες.

Α1. Ποια πρέπει να είναι η ακτίνα και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σταθμού ώστε αυτός να μην δημιουργεί διαφορές βαρύτητας στα σώματα των αστροναυτών μεγαλύτερες του 2% από το κεφάλι έως τα πόδια τους και να εξασφαλίζει βαρύτητα ίση με το 90 % της γήινης;



Α2. Αφού κατασκευαστεί ένας τέτοιος διαστημικός σταθμός θα έχει μάζα M=10^6 kg και για να δημιουργήσει την «τεχνητή βαρύτητα» θα πρέπει να τεθεί σε περιστροφή. Για να επιτευχθεί αυτό, η καλύτερη μέθοδος είναι να τοποθετηθούν τέσσερεις πύραυλοι εφαπτομενικά του σταθμού, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κάθε πύραυλος έχει μάζα m=1500 kg και είναι ικανός να παρέχει σταθερή δύναμη F=180 N. Σε ποσό χρόνο ο διαστημικός σταθμός θα παρέχει την επιθυμητή βαρύτητα στους αστροναύτες από τη στιγμή που θα πυροδοτηθούν και οι τέσσερεις πύραυλοι ταυτόχρονα;
Το μέσο ύψος των αστροναυτών είναι h=1,78 m, η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας στη Γη είναι g=9,8 m/s^2 και η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του είναι I=MR^2(για τους υπολογισμούς μας θεωρούμε τις ακτίνες του σταθμού αμελητέας μάζας και πως όλη η μάζα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιφέρειά του).

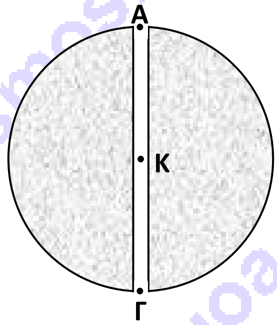
Β. Ομογενής μεταλλική πλάκα αμελητέου πάχους μάζας $2m$ έχει μήκος $4R$, κάμπτεται στη μέση σχηματίζοντας ορθή γωνία και τοποθετείται σε κύλινδρο (στερεωμένο κατά τρόπο ώστε η κίνησή του να είναι αδύνατη και με τον άξονά του οριζόντιο), όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κύλινδρος έχει ακτίνα R και το πάνω μέρος της μεταλλικής πλάκας είναι οριζόντιο.



Να υπολογίσετε τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής $\mu_{στ}$ μεταξύ της πλάκας και του κυλίνδρου, έτσι ώστε η πλάκα να παραμένει σε ισορροπία.

Θέμα 3^{ο}

Γη μεταβλητής πυκνότητας



Από το ένα άκρο της Γης Α ως το άλλο Γ θεωρούμε ότι έχει ανοιχτεί μία δίοδος που διέρχεται από το κέντρο της Κ και έχει αμελητέα διατομή. Από το άκρο Α αφήνουμε χωρίς αρχική ταχύτητα σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων και μάζας *m*. Θεωρούμε ότι:

i) Είναι γνωστός ο νόμος της παγκόσμιας έλξης, δηλαδή δύο υλικά σημεία με μάζες m_1 και m_2 που απέχουν απόσταση *r* έλκονται αμοιβαία με δυνάμεις αντίθετης φοράς, διεύθυνσης την ευθεία που ενώνει τις δύο μάζες και ίσου μέτρου που δίνεται από τη σχέση: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ (*G*: σταθερά παγκόσμιας έλξης).

ii) Το εσωτερικό της Γης έχει μεταβλητή πυκνότητα μάζας που εξαρτάται, όμως, μόνο από την απόσταση *r* από το κέντρο της, $\rho(r)$.

iii) Ένα σώμα που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός ομογενούς σφαιρικού φλοιού (δηλαδή αμελητέου πάχους) ο οποίος έχει μία ποσότητα μάζας ισοκατανεμημένη σε όλη του την επιφάνεια, δέχεται συνολικά μηδενική βαρυτική δύναμη από τον φλοιό.

iv) Ένα σώμα που βρίσκεται έξω από έναν ομογενή σφαιρικό φλοιό (δηλαδή με αμελητέο πάχος) ο οποίος έχει μία ποσότητα μάζας *Μ* ισοκατανεμημένη σε όλη του την επιφάνεια δέχεται από τον φλοιό συνολικά βαρυτική δύναμη ίση με τη βαρυτική δύναμη από υλικό σημείο μάζας *Μ* που είναι τοποθετημένο στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού.

Α. Θεωρώντας ότι το σώμα Σ δέχεται σε όλη τη διαδρομή του στο εσωτερικό της Γης βαρυτική δύναμη σταθερού μέτρου και ότι οι μόνες γνωστές ποσότητες είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης g_o και η ακτίνα της Γης $R_Γ$:

Α1. Εξετάστε αν το σώμα θα φτάσει στο σημείο Γ.

Α2. Είναι η κίνηση περιοδική;

Α3. Αν ναι, υπολογίστε την περίοδο *Τ* της κίνησης.

Α4. Γράψτε τις εξισώσεις ως συνάρτηση του χρόνου *t*, των αλγεβρικών τιμών των μεγεθών: επιτάχυνση *α* του σώματος Σ, ταχύτητα *υ* του σώματος Σ, θέση *x* του σώματος Σ (θέτοντας αρχή των αξόνων το κέντρο της Γης). Στις εξισώσεις θεωρήστε αρχική χρονική στιγμή τη στιγμή που το Σ ξεκινά από το Α και γράψτε αυτές έως χρόνο μίας περιόδου *Τ* (αν η κίνηση είναι περιοδική).

Β. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις ως συνάρτηση του χρόνου *t* των μεγεθών *α*, *υ* και *x* του προηγούμενου ερωτήματος για χρονικό διάστημα μίας περιόδου (αν η κίνηση είναι περιοδική). Σχολιάστε τυχόν ασυνέχειες ή έλλειψη παραγωγισιμότητας σε διάφορα σημεία των διαγραμμάτων που σχεδιάσατε.

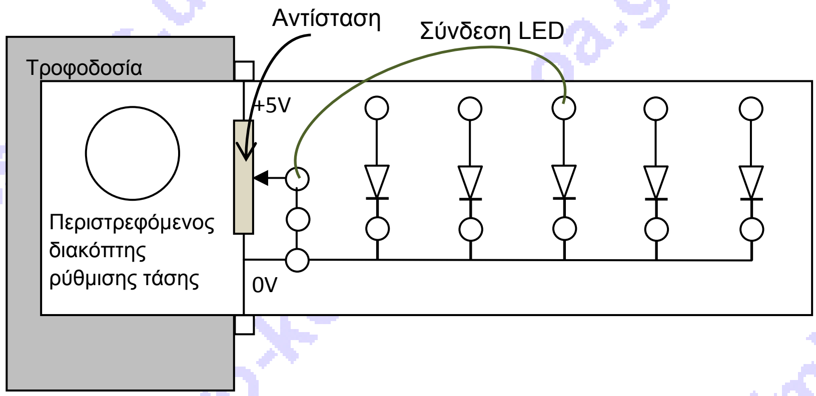
Γ1. Βρείτε την εξάρτηση της πυκνότητας $\rho(r)$ του εσωτερικού της Γης από την απόσταση r από το κέντρο της, θεωρώντας γνωστές τις ποσότητες επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης g_0, ακτίνα της Γης R_Γ και σταθερά παγκόσμιας έλξης G(*Υπόδειξη:* Θεωρήστε ως γνωστό ότι: $\int_0^r z^n dz = \frac{r^{n+1}}{n+1}$ ή χρησιμοποιήστε ιδιότητες των παραγώγων).

Γ2. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της πυκνότητας ρ ως συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο της Γης.

Πειραματικό Μέρος

Μία θεμελιώδης σταθερά της Κβαντικής Φυσικής είναι η σταθερά του Planck. Ο Robert Millikan πραγματοποίησε την πρώτη πειραματική της μέτρηση το 1916. Ακριβέστεροι πειραματικοί υπολογισμοί δίνουν σήμερα την τιμή της ίση με: $h=6{,}62607554\cdot 10^{-34} Js$. Ένας από τους τρόπους με τους οποίους μπορείτε να υπολογίσετε πειραματικά τη σταθερά είναι χρησιμοποιώντας διόδους εκπομπής φωτός (LED). Μία δίοδος κατασκευάζεται από δύο διαφορετικού τύπου ημιαγωγούς που φέρονται σε αγώγιμη επαφή, δημιουργώντας μια διαφορά δυναμικού (Φραγμός Δυναμικού) V_o. Προκειμένου η δίοδος να διαρρέεται από ρεύμα, πρέπει οι φορείς ηλεκτρικού ρεύματος (αρνητικά ηλεκτρόνια που βρίσκονται στη μία πλευρά της επαφής και θετικές οπές που βρίσκονται στην άλλη) να διασχίσουν αυτή τη διαφορά δυναμικού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εφαρμόζοντας μια εξωτερική τάση κατ΄ ελάχιστο ίση προς V_o. Να θεωρήσετε πως όταν τα δύο είδη φορέων επανασυνδέονται, αποδίδουν ενέργεια $e\cdot V_o$, δημιουργώντας ένα φωτόνιο.

Πραγματοποιήσαμε την πειραματική διάταξη που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και οι πειραματικές μετρήσεις που λάβαμε παρουσιάζονται στον αντίστοιχο πίνακα.



Στον πίνακα μετρήσεων φαίνεται η ελάχιστη τάση Vo που απαιτείται να εφαρμοστεί στα άκρα των LED για να αρχίσουν οριακά να φωτοβολούν. Οι LED που χρησιμοποιούνται στο πείραμα είναι κατασκευασμένες από διαφορετικά υλικά, με αποτέλεσμα να εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία διαφορετικών χρωμάτων (συχνοτήτων).

Χρώμαεκπομπής LED	$f\ (x10^{14}\ Hz)$	Διαφορά δυναμικού (V_o)	Ενέργεια φωτονίου ($10^{-18}\ J$)
Μπλε	6,38	2,43	
Πράσινο	5,33	2,05	
Κίτρινο	5,12	1,92	
Πορτοκαλί	4,83	1,81	
Κόκκινο	4,62	1,75	

1. Να συμπληρώσετε την κενή στήλη του πίνακα μετρήσεων κάνοντας κατάλληλους υπολογισμούς.
2. Να επιλέξετε τα κατάλληλα μεγέθη από τον πίνακα αυτό και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Από αυτή να υπολογίσετε τη σταθερά του Planck.
3. Με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης προσδιορίστε τις διαστάσεις της σταθεράς του Planck.
4. Ο Louis de Broglie (Νόμπελ Φυσικής 1929), πρότεινε ότι η διπλή φύση (σωματιδιακή και κυματική) ισχύει όχι μόνο για το φως αλλά και για την ύλη και προσδιόρισε το μήκος κύματος ενός σώματος με ορμή p ίση με: $\lambda = \frac{h}{p}$, όπου h η σταθερά του Planck. Εξηγήστε με ένα απλό παράδειγμα γιατί μήκη κύματος που αντιστοιχούν σε σώματα στο μακρόκοσμο δεν μπορούν να μετρηθούν πειραματικά.
Δίνονται το στοιχειώδες φορτίο του ηλεκτρονίου $q_e=1,6\cdot10^{-19}C$ και η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c=3\cdot10^{8}m/s$ (θεωρήστε ότι έχει την ίδια τιμή και στον αέρα).

Καλή Επιτυχία

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε κάποιο γράφημα σ' αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες, τιτλοδοτήστε και συμπεριλάβετε τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα.

Προτεινόμενες Απαντήσεις / Λύσεις

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο

Α.

α) Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο x, αφού το σημείο του ελαστικού μέσου στη θέση x=λ ξεκινά την ταλάντωσή του με μηδενική αρχική φάση (όπως ισχύει και για την πηγή).Δε θα μπορούσε να αντιστοιχεί στο t, αφού (για παράδειγμα) τη στιγμή T/4 η απομάκρυνση είναι –Α που έρχεται σε αντίθεση με τη μηδενική αρχική φάση. Το γράφημα παριστάνει στιγμιότυπο για t=T είτε i) παλμού διάρκειας τουλάχιστον T (μήκους τουλάχιστον λ) ή ii) κύματος.

β) Με παρόμοιο συλλογισμό καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο t. Παριστάνει ταλάντωση σημείου στο x=0 κατά τη διέλευση παλμού διάρκειας T (μήκους λ).

γ) Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο t. Παριστάνει ταλάντωση σημείου στο x=λ κατά τη διέλευση παλμού διάρκειας T (μήκους λ).

δ) Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο x. Παριστάνει στιγμιότυπο παλμού διάρκειας T (μήκους λ) τη στιγμή t=2T.

ε) Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο t. Παριστάνει ταλάντωση σημείου για x=0 κατά τη διέλευση παλμού διάρκειας 2T (μήκους 2λ).

στ) Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο x. Παριστάνει στιγμιότυπο για t=2T είτε i) παλμού διάρκειας τουλάχιστον 2T (μήκους τουλάχιστον 2λ) ή ii) κύματος.

ζ) Ο οριζόντιος άξονας δε μπορεί να αντιστοιχεί στο x, αφού το σημείο στη θέση 2λ ξεκινά ταλάντωση προς αρνητικές απομακρύνσεις, γεγονός που δε συμβιβάζεται με τη μηδενική αρχική φάση της πηγής. Ομοίως, δε μπορεί να αντιστοιχεί στο t, αφού τη στιγμή T/2 φαίνεται ότι το σημείο στη θέση λ/2 ξεκινά να ταλαντώνεται με αρχική φάση π που, ομοίως, αντίκειται στα δεδομένα. Άρα το γράφημα αυτό δεν είναι αποδεκτό.

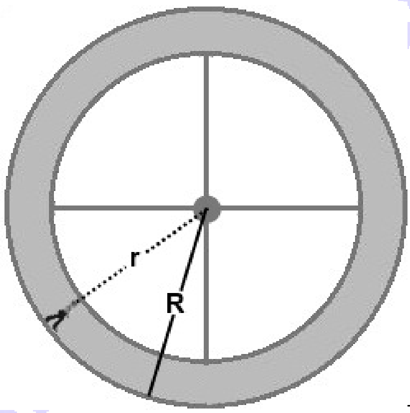
η) Ο οριζόντιος άξονας *μπορεί* να αντιστοιχεί στο x. Παριστάνει στιγμιότυπο παλμού διάρκειας 3T/2 (μήκους 3λ/2) για t=2T.

Μπορεί όμως και να αντιστοιχεί στο t, οπότε παριστάνει ταλάντωση σημείου σε x=λ/2 κατά τη διέλευση παλμού διάρκειας 3T/2 (μήκους 3λ/2).

Β.

Β1. Σωστό, **Β2.** Λάθος, **Β3.** Λάθος, **Β4.** Σωστό, **Β5.** Λάθος

Θέμα 2ο



Α1. Ας ονομάσουμε R την εξωτερική ακτίνα του σταθμού που είναι ίση με την απόσταση των ποδιών του αστροναύτη από το κέντρο του σταθμού και r την απόσταση του κεφαλιού του αστροναύτη από το κέντρο του σταθμού.

Ο αστροναυτης που θα στεκεται στο χείλος του σταθμού θα περιστρέφεται και αυτός. Το κεφάλι του αστροναύτη θα έχει διαφορετική κεντρομόλο επιτάχυνση $\boxed{\alpha_{\kappa\kappa} = \omega^2 r}(1)$ από τα πόδια του $\boxed{\alpha_{\kappa\pi} = \omega^2 R}(2)$ αφού η απόσταση τους από το κέντρο του τροχού δεν είναι η ίδια.

Οι διαφορές βαρύτητας στο σώμα του αστροναύτη δεν θα πρέπει να μεγαλύτερες του 2% από το κεφάλι έως τα πόδια οπότε:

$$\frac{\alpha_{\kappa\pi} - \alpha_{\kappa\kappa}}{\alpha_{\kappa\pi}} = 2\% \Rightarrow \frac{\alpha_{\kappa\pi} - \alpha_{\kappa\kappa}}{\alpha_{\kappa\pi}} = 0,02 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha_{\kappa\kappa}}{\alpha_{\kappa\pi}} = 0,02 \Rightarrow \frac{\alpha_{\kappa\kappa}}{\alpha_{\kappa\pi}} = 0,98 \Rightarrow \frac{\omega^2 r}{\omega^2 R} = 0,98 \Rightarrow \boxed{\frac{r}{R} = 0,98}(3)$$

Το ύψος h του ύψος του αστροναύτη είναι $\boxed{h = R - r}(4)$

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{R-h}{R} = 0,98 \Rightarrow 1 - \frac{h}{R} = 0,98 \Rightarrow \frac{h}{R} = 1 - 0,98 \Rightarrow R = \frac{h}{0,02} \Rightarrow R = \frac{1,78}{0,02} \Rightarrow \boxed{R = 89m}$$

Θέλουμε ο σταθμός να παρέχει βαρύτητα ίση με το 90 % της γήινης οπότε θα πρέπει η κεντρομόλος επιτάχυνση στην περιφέρειά του να είναι ίση με το 90 % της γήινης βαρύτητας άρα:

$$\alpha_{\kappa\pi} = 0,9g \Rightarrow \omega^2 R = 0,9g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0,9g}{R}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0,9 \times 9,8}{89}} \Rightarrow \omega \approx \sqrt{0,099} \Rightarrow \boxed{\omega \approx 0,315 rad/s}$$

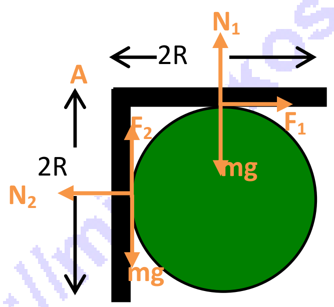
Α2. Οι πύραυλοι τοποθετούνται εφαπτομενικά του σταθμού οπότε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω του θα είναι: $\Sigma\tau = 4FR$ και η συνολική ροπή αδράνειας από το θεώρημα Steiner θα είναι: $I = MR^2 + 4mR^2$. Έτσι από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για το διαστημικό σταθμό θα έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\kappa} \Rightarrow 4FR = (MR^2 + 4mR^2)\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{(MR^2 + 4mR^2)\Delta\omega}{4FR} \Rightarrow \Delta t = \frac{(M + 4m)R\Delta\omega}{4F} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{(10^6 + 4 \times 1500) \times 89 \times 0,315}{4 \times 180} \Rightarrow \Delta t = 39146,666\text{s} \Rightarrow \boxed{\Delta t \approx 10,87h}$$

Β.

Για να ισορροπεί η πλάκα θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 = N_2$ **(1)**

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + F_2 = 2mg$ **(2)**

$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N_1 R = N_2 R + mgR \Rightarrow N_1 = N_2 + mg \Rightarrow N_1 - N_2 = mg$ **(3)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$F_1 + F_2 + N_1 = N_2 + 2mg \Rightarrow F_1 + F_2 = N_2 - N_1 + 2mg \overset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{F_1 + F_2 = mg} \textbf{(4)}$$

Επιπλέον, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$F_2 \leq \mu_{\sigma\tau.} N_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{F_2 \leq \mu_{\sigma\tau.} F_1} \textbf{(5)} \qquad \text{και}$$

$$F_1 \leq \mu_{\sigma\tau.} N_1 \overset{(3)}{\Rightarrow} F_1 \leq \mu_{\sigma\tau.}(N_2 + mg) \overset{(1)}{\Rightarrow} F_1 \leq \mu_{\sigma\tau.}(F_1 + mg) \Rightarrow F_1 \leq \mu_{\sigma\tau.} F_1 + \mu_{\sigma\tau.} mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 - \mu_{\sigma\tau.} F_1 \leq \mu_{\sigma\tau.} mg \Rightarrow F_1(1 - \mu_{\sigma\tau.}) \leq \mu_{\sigma\tau.} mg \Rightarrow \boxed{F_1 \leq \frac{\mu_{\sigma\tau.} mg}{1 - \mu_{\sigma\tau.}}} \quad \textbf{(6)}$$

Αφού ζητείται ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής οι σχέσεις (5) και (6) μετατρέπονται σε ισότητες. Επομένως καταλήγουμε στις εξής σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} &F_1 + F_2 = mg \\ &F_1 = \frac{\mu_{\sigma\tau.}^{\min} mg}{1 - \mu_{\sigma\tau.}^{\min}} \\ &F_2 = \mu_{\sigma\tau.}^{\min} F_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\mu_{\sigma\tau.}^{\min} mg}{1 - \mu_{\sigma\tau.}^{\min}} + \mu_{\sigma\tau.}^{\min} F_1 = mg \Rightarrow \frac{\mu_{\sigma\tau.}^{\min} mg}{1 - \mu_{\sigma\tau.}^{\min}} + \mu_{\sigma\tau.}^{\min} \cdot \left(\frac{\mu_{\sigma\tau.}^{\min} mg}{1 - \mu_{\sigma\tau.}^{\min}}\right) = mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_{\sigma\tau.}^{\min} mg}{1 - \mu_{\sigma\tau.}^{\min}} + \frac{\left(\mu_{\sigma\tau.}^{\min}\right)^2 mg}{1 - \mu_{\sigma\tau.}^{\min}} = mg \Rightarrow \frac{\mu_{\sigma\tau.}^{\min}}{1 - \mu_{\sigma\tau.}^{\min}} + \frac{\left(\mu_{\sigma\tau.}^{\min}\right)^2}{1 - \mu_{\sigma\tau.}^{\min}} = 1 \Rightarrow \left(\mu_{\sigma\tau.}^{\min}\right)^2 + 2\mu_{\sigma\tau.}^{\min} - 1 = 0$$

Από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης προκύπτει ότι:

$$\boxed{\mu_{\sigma\tau\alpha\tau.}^{\min} = \sqrt{2} - 1}$$

η οποία είναι η μόνη αποδεκτή λύση.

Θέμα 3ο

Α. Αφού το σώμα δέχεται κατά την κίνησή του βαρυτική δύναμη σταθερού μέτρου αυτή πρέπει να είναι ίση με το μέτρο της δύναμης αυτής στο σημείο Α, δηλαδή στην επιφάνεια της Γης. Η δύναμη αυτή κατά την κίνησή του Σ από το Α προς το Κ θα έχει, επομένως, μέτρο $F = mg_0$ και φορά προς το Κ. Έτσι το σώμα θα κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = \dfrac{F}{m} = g_0$ (ίσου μέτρου με την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης) και με φορά προς το Κ και θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, έως τη χρονική στιγμή t_1 που φτάνει στο Κ. Οι εξισώσεις των αλγεβρικών τιμών των a, υ και x (ορίζοντας για όλα τα διανύσματα θετική φορά αυτή από το Κ προς το Α) είναι:

$a = -g_0$ (1),	$\upsilon = -g_0 t$ (2),	$x = R_\Gamma - \frac{1}{2} g_0 t^2$ (3),	για $0 < t < t_1$.

Για να βρούμε σε πόσο χρόνο φτάνει στο Κ θέτουμε στη (3) x=0, οπότε: $0 = R_Γ - \frac{1}{2} g_0 t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2R_Γ}{g_0}}$ (4). Η ταχύτητά του τότε είναι από την (2): $υ_1 = -g_0\sqrt{\frac{2R_Γ}{g_0}} = -\sqrt{2g_0R_Γ}$ (5).

Μόλις περάσει το Κ το Σ εξακολουθεί να δέχεται δύναμη F ίδιου μέτρου, αλλά σύμφωνα με τη θεώρηση iv η δύναμη F ***<u>αντιστρέφει τη φορά της, έχοντας πάλι φορά προς το Κ</u>***. Επομένως το Σ κατά την κίνησή του από το Κ προς το Γ, που θα ξεκινήσει τη χρονική στιγμή t_1 από το Κ (x=0), θα εκτελέσει κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με αρχική ταχύτητα $υ_1$. Οι εξισώσεις των αλγεβρικών τιμών των $α$, $υ$ και x θα είναι:

$α = g_0$ (6),	$υ = -\sqrt{2g_0R_Γ} + g_0(t - t_1)$ (7),	$x = -\sqrt{2g_0R_Γ}(t - t_1) + \frac{1}{2}g_0(t - t_1)^2$ (8),	για $t_1<t<t_2$.

Η κίνηση αυτή τερματίζεται τη χρονική στιγμή t_2 που μηδενίζεται η ταχύτητα του Σ. Από την (7) και την (4) έχουμε: $0 = \sqrt{2g_0R_Γ} - g_0(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{2g_0R_Γ}}{g_0} + t_1 \Rightarrow t_2 = 2\sqrt{\frac{2R_Γ}{g_0}} = 2t_1$ (9). Την t_2 σύμφωνα με τη (8) το Σ βρίσκεται στη θέση $x = -\frac{1}{2}g_0(t_2 - t_1)^2 = -\frac{1}{2}g_0t_1^2 = -\frac{1}{2}g_0\frac{2R_Γ}{g_0} = -R_Γ$.

Δηλαδή ***<u>το Σ φτάνει στο Γ με μηδενική ταχύτητα</u>***.

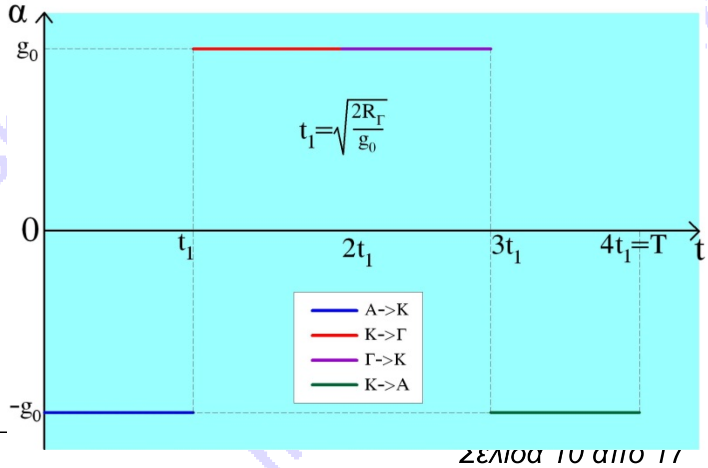
Στη συνέχεια επαναλαμβάνεται η κίνηση από το Γ στο Α με ανάλογο τρόπο που το σώμα κινήθηκε από το Α στο Γ. Από το Γ στο Κ η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα. Οι εξισώσεις θα είναι:

$α = g_0$ (10),	$υ = g_0(t - 2t_1)$ (11),	$x = -R_Γ + \frac{1}{2}g_0(t - 2t_1)^2$ (12),	για $2t_1<t<3t_1$.

Από το Κ στο Α η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_1$ και φοράς από το Κ στο Α. Οι εξισώσεις θα είναι:

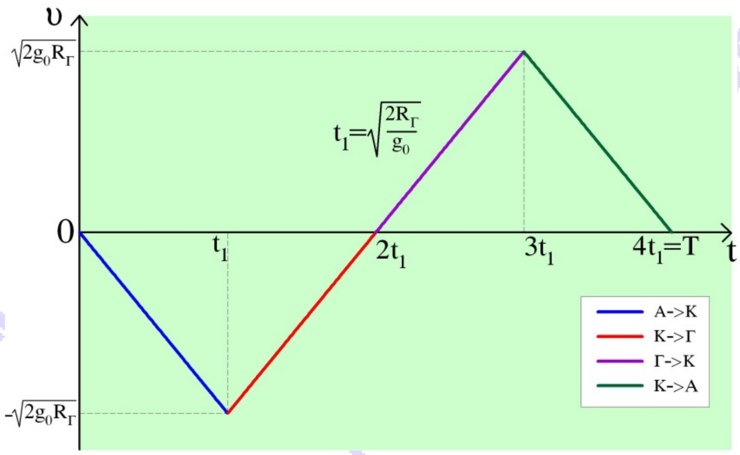
$α = -g_0$ (13),	$υ = \sqrt{2g_0R_Γ} - g_0(t - 3t_1)$ (14),	$x = \sqrt{2g_0R_Γ}(t - 3t_1) - \frac{1}{2}g_0(t - 3t_1)^2$ (15),	για $3t_1<t<4t_1$.

Στη συνέχεια η κίνηση επαναλαμβάνεται η ίδια. Συνεπώς το σώμα εκτελεί ***<u>περιοδική κίνηση</u>*** με περίοδο $T = 4t_1 = 4\sqrt{\frac{2R_Γ}{g_0}}$ (16).

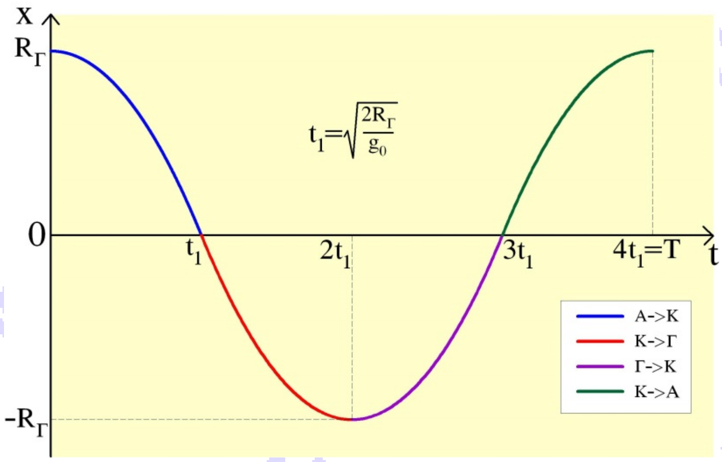


Β. Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών $α$, $υ$ και x σα συνάρτηση του χρόνου t φαίνονται στα επόμενα σχήματα και σχεδιάζονται με βάση τις εξισώσεις (1)-(3), (6)-(8), (10)-(12) και (13)-(15). Κάθε τμήμα κίνησης από την επιφάνεια της Γης προς το κέντρο Κ

http://micro-kosmos.uoa.gr



απεικονίζονται με διαφορετικό χρώμα. Στο διάγραμμα της επιτάχυνσης εμφανίζεται ασυνέχεια κάθε φορά που το σώμα Σ διέρχεται από το Κ, δηλαδή τις χρονικές στιγμές t_1 και $3t_1$. Στις χρονικές αυτές στιγμές αλλάζει φορά η βαρυτική δύναμη. Επομένως όλες τις άλλες χρονικές στιγμές τα διαγράμματα *α-t*, *υ-t* και *x-t* θα είναι συνεχή και παραγωγίσιμα.



Τις χρονικές στιγμές t_1 και $3t_1$ η ***ταχύτητα πρέπει να είναι συνεχής***. Έστω ότι δεν είναι συνεχής. Τότε η επιτάχυνση τις χρονικές αυτές στιγμές θα είναι $\alpha=\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ με τον παρανομαστή Δt να τείνει στο 0. Αλλά ο αριθμητής είναι διάφορος του 0 (αφού η συνάρτηση της ταχύτητας κάνει άλμα λόγω της ασυνέχειας) και επομένως η επιτάχυνση πρέπει να απειρίζεται. Όμως η *α* παραμένει πεπερασμένη κάθε χρονική στιγμή, οπότε η ταχύτητα δεν μπορεί να έχει ασυνέχειες καμία χρονική στιγμή. Το γεγονός ότι η *α* είναι ασυνεχής στις στιγμές t_1 και $3t_1$, επιβάλλει ότι η ταχύτητα δεν θα είναι παραγωγίσιμη αυτές τις στιγμές (η *α* είναι η παράγωγος της *υ*).

Το γεγονός ότι η ταχύτητα *υ* είναι συνεχής, επιβάλλει ότι ***η θέση σα συνάρτηση του χρόνου***, ως παράγωγος της ταχύτητας, ***θα είναι παραγωγίσιμη σε κάθε χρονική στιγμή***.

Γ. Σε κάθε σημείο της διαδρομής του που απέχει απόσταση *r* από το κέντρο Κ το Σ θα δέχεται βαρυτική δύναμη μόνο από τους φλοιούς που βρίσκονται εντός απόστασης *r* από το Κ (σύμφωνα με τη θεώρηση iii). Κάθε φλοιός παράγει δύναμη ίση με τη δύναμη που θα παρήγαγε ποσότητα μάζας ίση με τη μάζα του φλοιού που βρίσκεται στο Κ (σύμφωνα με τη iv). Σύμφωνα με τις θεωρήσεις i και iv όλες οι μάζες των σφαιρικών φλοιών θα παράγουν βαρυτική δύναμη: $F(r)=G\dfrac{mM(r)}{r^2}$ (17), όπου $M(r)$ η μάζα των σφαιρικών φλοιών με ακτίνα έως *r*. Προκειμένου το μέτρο της βαρυτικής δύναμης στην (17) να μην εξαρτάται από την απόσταση *r*, θα πρέπει η ποσότητα $M(r)$ να είναι ανάλογη του r^2.

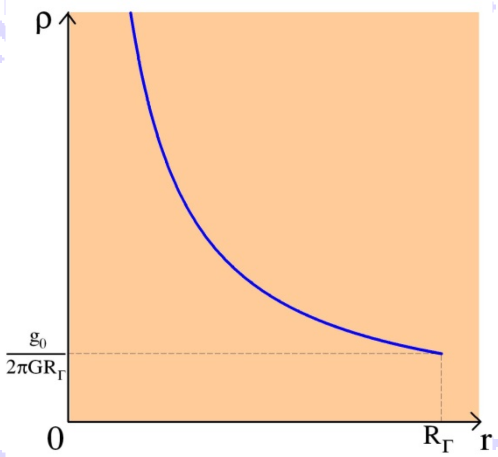
Η μάζα ενός φλοιού με ακτίνα z θα είναι: $m_{\sigma\varphi.\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}}=V_{\sigma\varphi.\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}}\,\rho(z)=4\pi z^2 dz\rho(z)$. Για να βρω τη μάζα όλων των φλοιών έως ακτίνα *r* θα πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλους τους σφαιρικούς φλοιούς με ακτίνα από 0 έως *r*. Η συνολική μάζα αυτών των φλοιών θα είναι:

$M(r)=\int_0^r 4\pi z^2\rho(z)dz$ (18).

Δεδομένου ότι: $\int_0^r z^n dz=\frac{r^{n+1}}{n+1}$, προκύπτει ότι η ποσότητα $4\pi z^2\rho(z)$ στην (18) πρέπει να είναι ανάλογη του z^1, δηλαδή $4\pi z^2\rho(z)=Cz \Rightarrow \rho(z)=\frac{D}{z}$ (19), όπου D μία σταθερά που θα προσδιοριστεί στη συνέχεια. Έτσι η (18) γίνεται:

$$M(r)=\int_0^r 4\pi z^2\frac{D}{z}dz=4\pi D\int_0^r zdz=4\pi D\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^r\right)=4\pi D\frac{r^2}{2}=2\pi Dr^2.$$

Στη συνέχεια η (17) γίνεται: $F(r)=G\frac{m2\pi Dr^2}{r^2}=2\pi GmD=F$ (19), δηλαδή ανεξάρτητο της απόστασης r από το Κ. Την ίδια δύναμη θα δέχεται το Σ και στην επιφάνεια της Γης, όπου $r=R_Γ$ και $F=G\frac{mM_Γ}{R_Γ^2}$ (20), όπου $M_Γ$ η συνολική μάζα της Γης. Επίσης στην επιφάνεια της Γης $g_0=\frac{F}{m}=G\frac{M_Γ}{R_Γ^2}$ (21). Από τις (20), (21) $F=mg_0$ (22) (κάτι που θα μπορούσε να γραφτεί και κατευθείαν χωρίς τις (20) και (21)). Από τις (19) και (22) έχουμε: $2\pi GmD=mg_0 \Rightarrow 2\pi GD=g_0 \Rightarrow D=\frac{g_0}{2\pi G}$ (23). Από τις (19) και (23) έχουμε ότι η πυκνότητα της Γης πρέπει να είναι συναρτήσει της απόστασης από το Κ: $\rho(r)=\frac{g_0}{2\pi Gr}$ (24). Η γραφική της παράσταση συναρτήσει του r φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα και είναι *υπερβολή*. Η γραφική παράσταση περιορίζεται ανάμεσα στις τιμές $r=R_Γ$, όπου $\rho(R_Γ)=\frac{g_0}{2\pi GR_Γ}$ και r=0 που η πυκνότητα τείνει στο +∞ (χωρίς, όμως, η βαρυτική δύναμη να απειρίζεται σε κανένα σημείο!).



Πειραματικό Μέρος

1.

Χρώμα εκπομπής LED	f ($\times 10^{14}$ Hz)	Διαφορά δυναμικού (V_0)	Ενέργεια φωτονίου (10^{-18} J)
Μπλε	6,38	2,43	0,389
Πράσινο	5,33	2,05	0,328
Κίτρινο	5,12	1,92	0,307
Πορτοκαλί	4,83	1,81	0,290
Κόκκινο	4,62	1,75	0,280

2. Θέλουμε να μετρήσουμε το μέγιστο μήκος κύματος φωτονίου που καθορίζεται από την ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να επανασυνδεθεί ένα ζεύγος φορέων και αυτή είναι αριθμητικά ίση με την ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να φωτοβολήσει το LED. Άρα

$$E = hf = eV_0 \Rightarrow \boxed{h\frac{c}{\lambda} = eV_0}$$

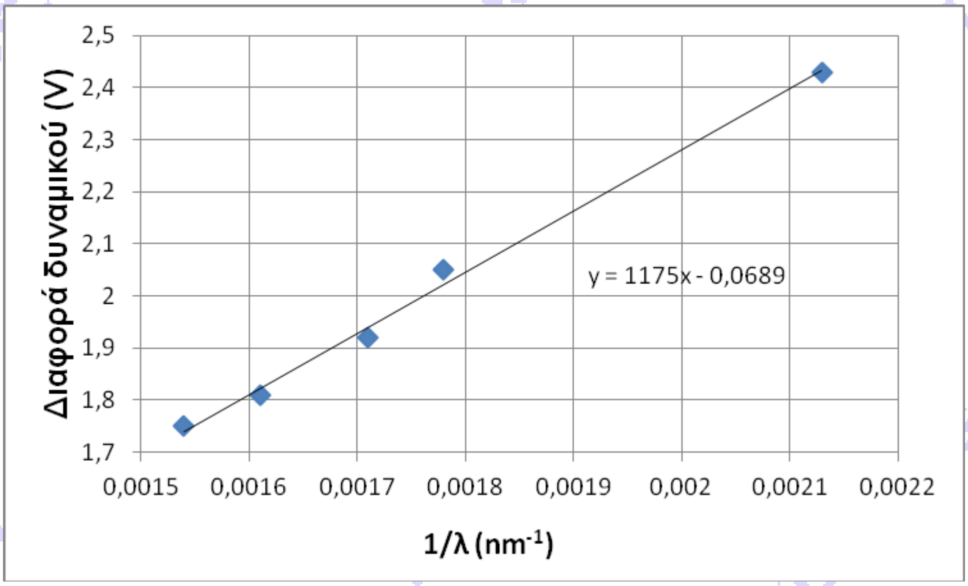
Επομένως κάνοντας τη γραφική παράσταση $V_0 = f(1/\lambda)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά του Plank από την κλίση του γραφήματος.

Για να γίνει η πιο πάνω γραφική παράσταση θα πρέπει να επεκταθεί ο πίνακας με τις πειραματικές μετρήσεις.

Χρώμα εκπομπής LED	λ(nm)	1/λ(nm^{-1})	f ($\times 10^{14}$ Hz)	Διαφορά δυναμικού (V_0)
Μπλε	470	0,00213	6,38	2,43
Πράσινο	563	0,00178	5,33	2,05
Κίτρινο	585	0,00171	5,12	1,92
Πορτοκαλί	620	0,00161	4,83	1,81
Κόκκινο	650	0,00154	4,62	1,75

http://micro-kosmos.uoa.gr

κλίση=$\frac{hc}{e}$=1,175 10^{-6} Vm, άρα h=6,267 10^{-34}Js



3.Η σταθερά του Planck έχει διαστάσεις στροφορμής

$J{\cdot}s=N{\cdot}m{\cdot}s=kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}$ή $[M][L^2][T^{-1}]$

4.Το μέτρο της ορμής ενός μαθητή που ζυγίζει m=70 kg και βαδίζει με ταχύτητα υ=1m/s, είναι p=70 kg·m/s. Άρα το αντίστοιχο μήκος κύματος κατά deBroglie θα είναι λ=h/p=8,95 10^{-36}m που δεν είναι πειραματικά ανιχνεύσιμο.

Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Θεωρητικό Μέρος
Θέμα 1^{o}
Α.

(α)

i) x	**ii)**t=T
iii) Βλ. προτεινόμενες απαντήσεις	

(β)

i)t	**ii)** x=0
iii) Βλ. προτεινόμενες απαντήσεις	

(γ)

i)t	**ii)** x=λ
iii) Βλ. προτεινόμενες απαντήσεις	

(δ)

i) x	**ii)**t=2T
iii) Βλ. προτεινόμενες απαντήσεις	

(ε)

i)t	**ii)** x=0
iii) Βλ. προτεινόμενες απαντήσεις	

http://micro-kosmos.uoa.gr

(στ)

i) x	**ii)**t=2T
iii) Βλ. προτεινόμενες απαντήσεις	

(ζ)

i)-	**ii) -**
iii) Βλ. προτεινόμενες απαντήσεις	

(η)

i)α) x ή β) t	**ii)**α) t=2T ή β) x=λ/2
iii) Βλ. προτεινόμενες απαντήσεις	

Β.

Β1. Σ	**Β2.**Λ	**Β3.**Λ	**Β4.** Σ	**Β5.**Λ

Θέμα 2^ο

Α1. ω=0,315 rad/s

Α2. Δt= 10,87h

Β. $\mu_{\sigma\tau}=\sqrt{2}-1$

Θέμα 3^ο

Α1. Βλ. προτεινόμενες λύσεις

Α2. Φτάνει στο Γ με μηδενική ταχύτητα.

Α3. $T=4\sqrt{\dfrac{2R_\Gamma}{g_0}}$

Α4. Βλ. προτεινόμενες λύσεις

Β. (Στο τετράδιό σας) Βλ. προτεινόμενες λύσεις

Γ1. ρ(r)= $\frac{g_0}{2\pi G r}$

Γ2. (Στο τετράδιό σας) Βλ. προτεινόμενες λύσεις

Πειραματικό Μέρος

1.

Χρώμαεκπομπής LED	*f (x10^{14} Hz)*	Διαφορά δυναμικού (V_o)	Ενέργεια φωτονίου (10^{-18} J)
Μπλε	6,38	2,43	0,389
Πράσινο	5,33	2,05	0,328
Κίτρινο	5,12	1,92	0,307
Πορτοκαλί	4,83	1,81	0,290
Κόκκινο	4,62	1,75	0,280

2. (Στο μιλιμετρέ χαρτί) Βλ. προτεινόμενες λύσεις

3. [h]= $[M][L^2][T^{-1}]$ ($kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$)

4. λ=$8{,}95\ 10^{-36}$m

Βλ. προτεινόμενες λύσεις