Γ΄ Λυκείου

13 Απριλίου 2013

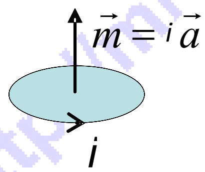
Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο

Α. Όταν ένας ρευματοφόρος βρόγχος τοποθετηθεί σε μαγνητικό πεδίο έχει συμπεριφορά όμοια με εκείνη μιας μαγνητικής βελόνας. Η μία όψη του βρόγχου λειτουργεί ως βόρειος πόλος της βελόνας και η άλλη όψη ως νότιος πόλος. Οι μαγνητικές βελόνες, οι γραμμικοί μαγνήτες και οι ρευματοφόροι βρόγχοι μπορούν να θεωρηθούν ως μαγνητικά δίπολα.

Η μαγνητική διπολική ροπή είναι ένα διάνυσμα που ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{m} = i\vec{a}$$

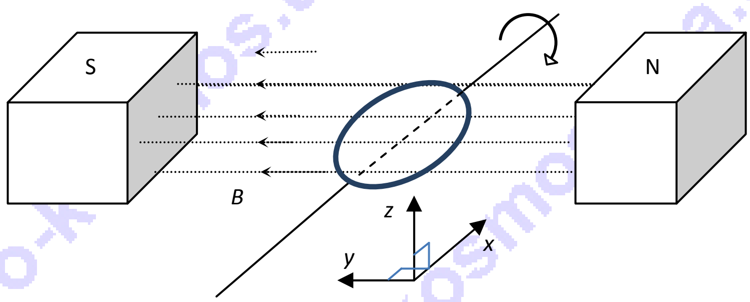


όπου i είναι το ρεύμα και a το εμβαδόν της επιφάνειας του βρόγχου. Η κατεύθυνση της μαγνητικής διπολικής ροπής $\vec{m}$ προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού και φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Η συνισταμένη δύναμη σε μαγνητικό δίπολο από ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν. Η ροπή που δέχεται το μαγνητικό δίπολο από ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι:

$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ οπότε $\tau = mB$ημθ όπου θ η γωνία μεταξύ $\vec{m}$ και $\vec{B}$.

Ένας λεπτός αγώγιμος δακτύλιος με ηλεκτρική αντίσταση R=0,5 Ω και ακτίνα $r = 10\sqrt{\pi}\,cm$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=20 rad/s κατά την ωρολογιακή φορά όπως φαίνεται στο σχήμα, με τη βοήθεια κινητήρα και χωρίς τριβές γύρω από τη διάμετρό του στον άξονα x. Ο δακτύλιος βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B=10^{-1}T στη διεύθυνση του άξονα y, και τη χρονική στιγμή t=0 το επίπεδό του είναι κάθετο στις μαγνητικές γραμμές όπως φαίνεται στο σχήμα.



1. Να βρείτε το ηλεκτρικό ρεύμα που κυκλοφορεί στο δακτύλιο σε σχέση με το χρόνο t.

2. Ποια θα είναι η κατεύθυνση της ροπής στο δακτύλιο από το μαγνητικό πεδίο;

3. Να βρείτε τη ροπή στο δακτύλιο από το μαγνητικό πεδίο σε σχέση με το χρόνο και να την παραστήστε την γραφικά.

4. Να βρείτε τη μέση απώλεια ισχύος λόγω φαινομένου Joule στο δακτύλιο.

5. Υποθέστε ότι η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I=\frac{1}{2}Mr^2$ Αν τη χρονική στιγμή *t*= π/8 s αποσυνδεθεί ο κινητήρας, να βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση του δακτυλίου τη στιγμή αυτή. Δίνεται η μάζα του δακτυλίου *M*=100 g.

Β. Το Παγκόσμιο Σύστημα Εντοπισμού Θέσης (περισσότερο γνωστό ως GPS) χρησιμοποιεί δορυφόρους που φέρουν πολύ ακριβή ατομικά ρολόγια και εκτελούν δωδεκάωρες τροχιές περιστροφής γύρω από τη Γη. Κάθε δορυφόρος εκπέμπει συνεχώς μηνύματα που περιλαμβάνουν τη στιγμή εκπομπής και το αντίστοιχο δορυφορικό στίγμα που έχει ο δορυφόρος τη στιγμή εκπομπής. Η τροχιά του κάθε δορυφόρου είναι γνωστή με ακρίβεια. Έτσι για να προσδιορίσει την τοποθεσία του με ακρίβεια, ο δέκτης GPS χρησιμοποιεί το χρόνο κατά τον οποίο κάθε σήμα εκπέμφθηκε από το δορυφόρο (όπως αυτό προσδιορίζεται από το ατομικό ρολόι του δορυφόρου) και την τιμή της ταχύτητας του φωτός. Για να επιτευχθεί ακρίβεια στην εύρεση της τοποθεσίας το GPS πρέπει να γνωρίζει το χρόνο με ακρίβεια ns, για τέτοιες τιμές χρόνου ο μαθηματικός αλγόριθμος που χρησιμοποιεί πρέπει να λάβει υπόψη και σχετικιστικά φαινόμενα. Το κυριότερο από αυτά είναι η βαρυτική διαστολή του χρόνου που προβλέπει η γενική θεωρία της σχετικότητας, η ύπαρξη δηλαδή βαρυτικού πεδίου επηρεάζει το χρόνο που μετρά ένα ρολόι. Θεωρούμε πως το ρολόι του δέκτη GPS και του δορυφόρου συγχρονίστηκαν κατά τη στιγμή της δημιουργίας τους.

Η μαθηματική σχέση που συνδέει τη χρονική διάρκεια που μετρά ο δέκτης GPS στη γη και το ρολόι στο δορυφόρο είναι η παρακάτω:

$$\Delta t_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma} = \Delta t_{\Delta o\rho}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{GM_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma}}{r_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma}}-\frac{GM_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma}}{r_{\Delta o\rho}}\right)\right]$$

1. Υπολογίστε την απόσταση H που βρίσκεται ένας τέτοιος δορυφόρος από την επιφάνεια της γης.

2. Βρείτε την σχετική διόρθωση στο χρόνο που πρέπει να λάβει υπόψη του ο δέκτης GPS στους υπολογισμούς του και σχολιάστε το πώς η ύπαρξη του βαρυτικού πεδίου επηρεάζει το χρόνο που μετρά ένα ρολόι.

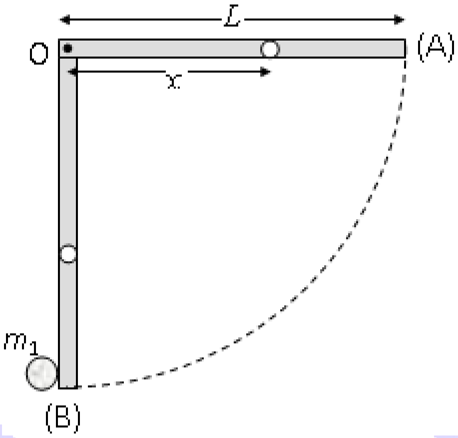
Θεωρούνται γνωστά:

G= 6,67384 × 10^{-11}Nm^2/kg^2 σταθερά της παγκόσμιας έλξης, $M_{\Gamma\eta\varsigma}$ =5,9736 × 10^{24} kg μάζα της Γης, $R_{\Gamma\eta\varsigma}$ = 6371 km ακτίνα της Γης, c = 299792458 m/s, ταχύτητα του φωτός.

Θέμα 2ο

Α. Οι σελίδες δύο ίδιων βιβλίων Α και Β, χωρίς εξώφυλλα, υπερκαλύπτουν η μία την άλλη. Η μάζα κάθε βιβλίου είναι 1000g και το κάθε βιβλίο έχει 200 σελίδες. Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ των σελίδων είναι μ=0,3. Το Α είναι στερεωμένο στο τραπέζι. Βρείτε το μέτρο της ελάχιστης οριζόντιας δύναμης F_{min} που πρέπει να ασκηθεί στο Β ώστε να αρχίσει να εξέρχεται από το Α. Θεωρείστε ότι η πρώτη επάνω σελίδα του Α είναι κάτω από την πρώτη σελίδα του Β και ότι η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας είναι g=9,8m/s^2.

Β. Ομογενής μεταλλική ράβδος μήκους L κατασκευάζεται με πήξη μετάλλου σε καλούπι.



Κατά την κανονική διαδικασία η ράβδος που παράγεται έχει μάζα M. Στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως μια φυσαλίδα αέρα (αμελητέων διαστάσεων σε σχέση με τις διαστάσεις της ράβδου) εγκλωβίστηκε κατά την πήξη του μετάλλου στο καλούπι μέσα στον όγκο της ράβδου, χωρίς να γνωρίζουμε την απόστασή της x από την άκρη Ο της ράβδου. Έτσι, η ράβδος που παράχθηκε έχει μάζα μειωμένη κατά m, σε σχέση με την κανονική. Για να εντοπιστεί η θέση της φυσαλίδας, η ράβδος στερεώνεται στην άκρη της Ο και τοποθετείται σε οριζόντια θέση (Α). Στη συνέχεια αφήνεται να κινηθεί στο κατακόρυφο επίπεδο. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το Ο αν δεν είχε τη φυσαλίδα θα ήταν $I = \frac{1}{3}ML^2$.

1. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα ω περιστροφής της ράβδου μόλις φτάσει στην κατώτερη θέση της (Β) σε συνάρτηση με τις ποσότητες M, m, L, x και g (όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας).

Θεωρήστε ότι, τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση (Β), το άλλο άκρο της ράβδου συγκρούεται ελαστικά με ακίνητη σημειακή μάζα m_1. Η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται για διάφορες τιμές της μάζας m_1, ώσπου να επιτευχθεί η ακινητοποίηση της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. Υπολογίστε:

2. Την ταχύτητα υ με την οποία θα κινηθεί η μάζα m_1 μετά την ελαστική της κρούση με τη ράβδο.

3. Τη θέση x της φυσαλίδας αέρα σε σχέση με τις ποσότητες M, m, m_1 και L.

4. Βρείτε μία έκφραση της μάζας m_1 σε σχέση με τη θέση x της ατέλειας και υπολογίστε τις ακραίες τιμές της m_1 που πρέπει να είναι διαθέσιμες κατά τη διαδικασία προσδιορισμού της άγνωστης θέσης x.

Θέμα 3ο

Α. Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της σύγχρονης φυσικής είναι η λεγόμενη ελεγχόμενη πυρηνική σύντηξη. Στο διεθνές ερευνητικό πρόγραμμα ITER (International Thermonuclear ή Tokamak Experimental Reactor), εναποθέτουμε τις ελπίδες μας στον αντιδραστήρα θερμοπυρηνικής σύντηξης Tokamak, προκειμένου μέσω μαγνητικής παγίδευσης του θερμού πλάσματος να πετύχουμε την ελεγχόμενη πυρηνική σύντηξη. Η σύντηξη με τις μεγαλύτερες προοπτικές είναι εκείνη όπου τα ισότοπα του Υδρογόνου, Δευτέριο (D) και Τρίτιο (Τ) συντήκονται και δίνουν το ισότοπο του Ηλίου ^4He και ένα νετρόνιο n.

$$D + T \rightarrow {}^4He + n$$

1. Καθορίστε την ενέργεια E_0, η οποία ελευθερώνεται από μια τέτοια σύντηξη των δύο ισοτόπων του Υδρογόνου.

Δίνονται: Μάζα Δευτέριου: $m_D = 3.34447 \cdot 10^{-27} kg$,

Μάζα τρίτιου: $m_T = 5.00732 \cdot 10^{-27} kg$,

Μάζα Ήλιου : $m_{He} = 6.64432 \cdot 10^{-27} kg$,

Μάζα Νετρονίου : $m_n = 1.67439 \cdot 10^{-27} kg$,

Ταχύτητα φωτός: $c = 2.9979 \cdot 10^8 m/s$,

2. Στην Πυρηνική Φυσική η ενέργεια συνήθως μετριέται σε ηλεκτρονιοβόλτ (eV). Το 1 (eV) είναι η ενέργεια την οποία αποκτά ένα ηλεκτρόνιο όταν περνά από επιταχύνουσα τάση ενός volt. Υπολογίστε την ενέργεια που βρήκατε στο ερώτημα Α σε eV. Δίνεται: Το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο $e = 1.6022 \cdot 10^{-19} C$.

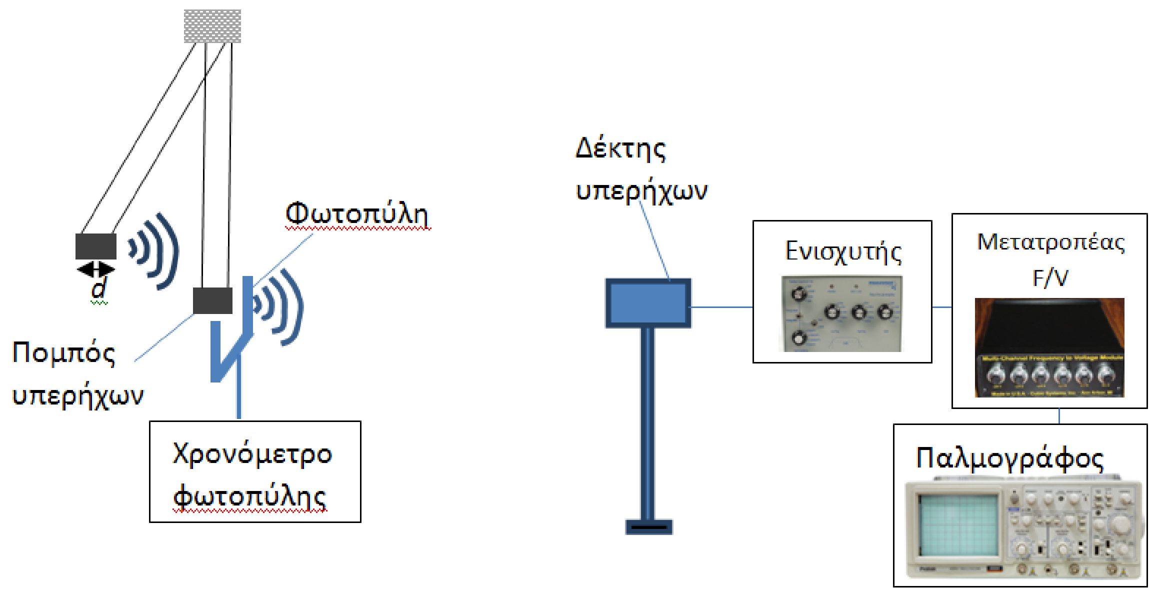
3. Θεωρώντας ότι τη στιγμή της Σύντηξης οι Κινητικές Ενέργειες των αντιδρώντων είναι αμελητέες, καθορίστε τις Κινητικές Ενέργειες των προϊόντων της Σύντηξης, δηλαδή την K_{He} και την K_n, αγνοώντας σχετικιστικά φαινόμενα.

4. Στον Tokamak το μείγμα Δευτερίου-Τριτίου θερμαίνεται σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες, στις οποίες τα άτομα είναι πλήρως ιονισμένα και το μείγμα βρίσκεται σε μια κατάσταση που λέγεται πλάσμα. Θεωρείστε ότι η μέση κινητική ενέργεια ανά σωμάτιο είναι η προβλεπόμενη από το πρότυπο του ιδανικού αερίου. Για να είναι δυνατή η σύντηξη είναι απαραίτητο να υπερνικηθεί η άπωση Coulomb μεταξύ των αντιδρώντων πυρήνων ώστε να βρεθούν σε μια απόσταση $a = 10^{-14}\,\mathrm{m}$ όπου υπερισχύουν οι ελκτικές ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις. Εκτιμείστε τη θερμοκρασία T στην οποία η πυρηνική σύντηξη είναι δυνατή για την πλειονότητα των συγκρουόμενων πυρήνων. Δίνεται η σταθερά του Boltzmann $k_B = 1.3806 \cdot 10^{-23} J/K$ και η διηλεκτρική σταθερά του κενού $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ *F/m.*

5. Για να διατηρηθεί το πλάσμα απαιτείται η ύπαρξη μαγνητικού πεδίου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, όπου η θερμοκρασία $T_0 = 10^8\,\mathrm{K}$, επικρατεί τόσο υψηλή πίεση ώστε απαιτείται ισχυρό μαγνητικό πεδίο (που δημιουργείται από υπεραγώγιμους ηλεκτρομαγνήτες) αντισταθμίζοντας την πίεση λόγω της θερμικής κίνησης. Με την παρουσία του μαγνητικού πεδίου, η πρόσθετη πίεση λόγω του μαγνητικού πεδίου είναι $P = \gamma \mu_0^{\alpha} B^{\beta}$, όπου $\gamma = 1/2$, μ_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού ίση προς $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6}$ *H*/*m* και B είναι το μαγνητικό πεδίο. Με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης, βρείτε τα α και β και καθορίστε το μαγνητικό πεδίο που απαιτείται για τη συγκράτηση του πλάσματος αν σε κάθε στιγμή οι συγκεντρώσεις και των τεσσάρων πληθυσμών σωματίων στο πλάσμα είναι ίσες με 10^{20} σωμάτια σε κάθε m^3.

Πειραματικό Μέρος

Ένας πομπός υπερήχων με συχνότητα *f* = 40kHz είναι τοποθετημένος σε κύλινδρο από αλουμίνιο με μήκος *d*=4,9 cm, κρέμεται από την οροφή μέσω δύο (για λόγους διατήρησης του προσανατολισμού του) ατσάλινων ράβδων και μπορεί να αιωρείται με τη βοήθεια ρουλεμάν όπως φαίνεται στο σχήμα.

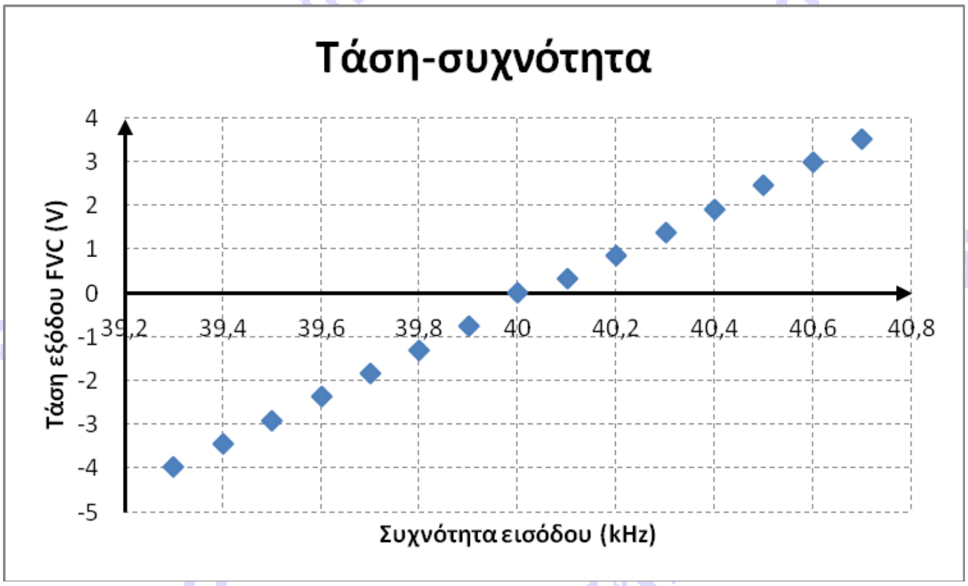


Με αυτό τον τρόπο οι υπέρηχοι εκπέμπονται κυρίως στην οριζόντια διεύθυνση. Σε απόσταση 60cm από τη θέση ισορροπίας του πομπού, τοποθετείται δέκτης υπερήχων ο οποίος συνδέεται με ενισχυτή, μετατροπέα συχνότητας σε τάση (Frequency to Voltage Converter, FVC) και παλμογράφο για την εμφάνιση της τάσης. Θέτουμε το εκκρεμές σε ταλάντωση. Στο κατώτερο σημείο όταν ο πομπός κινείται προς τον δέκτη και όταν απομακρύνεται από αυτόν οι αντίστοιχες ταχύτητές του υ_1 και υ_2 μετρώνται με τη βοήθεια χρονομέτρου φωτοπύλης.

1. Περιγράψτε πως υπολογίζουμε την ταχύτητα του κυλίνδρου στο κατώτερο σημείο;

2. Αν f_1 και f_2 οι συχνότητες εισόδου στον μετατροπέα όταν ο πομπός έχει ταχύτητες αντίστοιχα υ_1 και υ_2, να εκφράσετε τη διαφορά $\Delta f = f_1 - f_2$ των δύο συχνοτήτων σε σχέση με τη συχνότητα *f* τις ταχύτητες υ_1, υ_2 και την ταχύτητα του ήχου στον αέρα u θεωρώντας ότι $u \gg \upsilon_1$ και $u \gg \upsilon_2$

3. Επειδή η συχνότητα των υπερήχων που φτάνουν στον δέκτη μεταβάλλεται γρήγορα χρησιμοποιούμε τον FVC, του οποίου η έξοδος είναι μια συνεχής τάση ανάλογη της συχνότητας εισόδου από τον δέκτη. Βαθμονομούμε τον μετατροπέα ώστε να δείχνει τάση μηδέν όταν η πομπός είναι ακίνητος στη θέση ισορροπίας του και η συχνότητα στο δέκτη είναι f=40kHz και μεταβάλλοντας τη συχνότητα του πομπού από 39,3 μέχρι 40,7 kHz μετράμε την τάση εξόδου του μετατροπέα. Από τις πειραματικές τιμές κάνουμε το παρακάτω γράφημα τάσης-συχνότητας.



Αν V_1 και V_2 οι τάσεις εξόδου του μετατροπέα όταν ο πομπός έχει ταχύτητες αντίστοιχα υ_1 και υ_2, να εκφράσετε τη διαφορά $\Delta V=V_1-V_2$ των δύο τάσεων σε σχέση με τη συχνότητα f τις ταχύτητες υ_1,υ_2 και την ταχύτητα του ήχου στον αέρα u θεωρώντας ότι $u>>\upsilon_1$ και $u>>\upsilon_2$

4. Εκτελώντας το πείραμα πολλές φορές για διάφορες γωνίες εκτροπής του εκκρεμούς και μετρώντας τις ταχύτητες υ_1,υ_2 και τις τάσεις V_1,V_2 κάθε φορά παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα δεδομένων.

$\upsilon_1+\upsilon_2$ (m/s)	V_1-V_2 (V)
0,75	0,5
1,26	0,8
2,05	1,3
2,37	1,5
2,84	1,8
3,48	2,2
3,95	2,5
4,42	2,8
4,74	3,0

Να κάνετε το κατάλληλο γράφημα από το οποίο να υπολογίσετε την ταχύτητα u του ήχου στον αέρα.

Καλή Επιτυχία

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε κάποιο γράφημα σ’ αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες, τιτλοδοτήστε και συμπεριλάβετε τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα

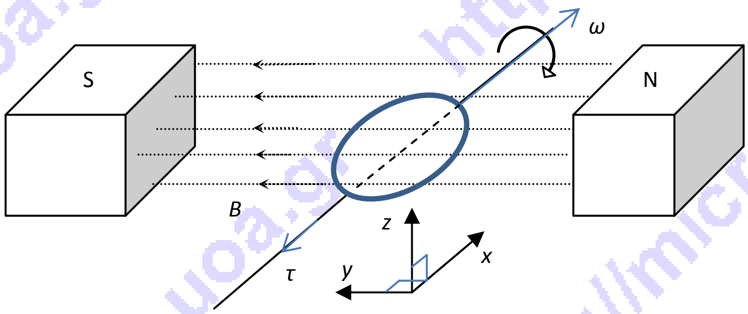
Συνοπτικές Απαντήσεις
Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο:
Α.
1. Από το νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday έχουμε:
$E_{επ} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\pi r^2 B συνωt)}{dt} = \omega\pi r^2 B ημωt$ (1)

Αλλά: $i = \frac{E_{επ}}{R}$ η οποία με τη βοήθεια της (1) δίνει:

$i = \frac{\omega\pi r^2 B ημωt}{R}$ και με αντικατάσταση τελικά: $i = 0{,}4ημ20t$ (2)

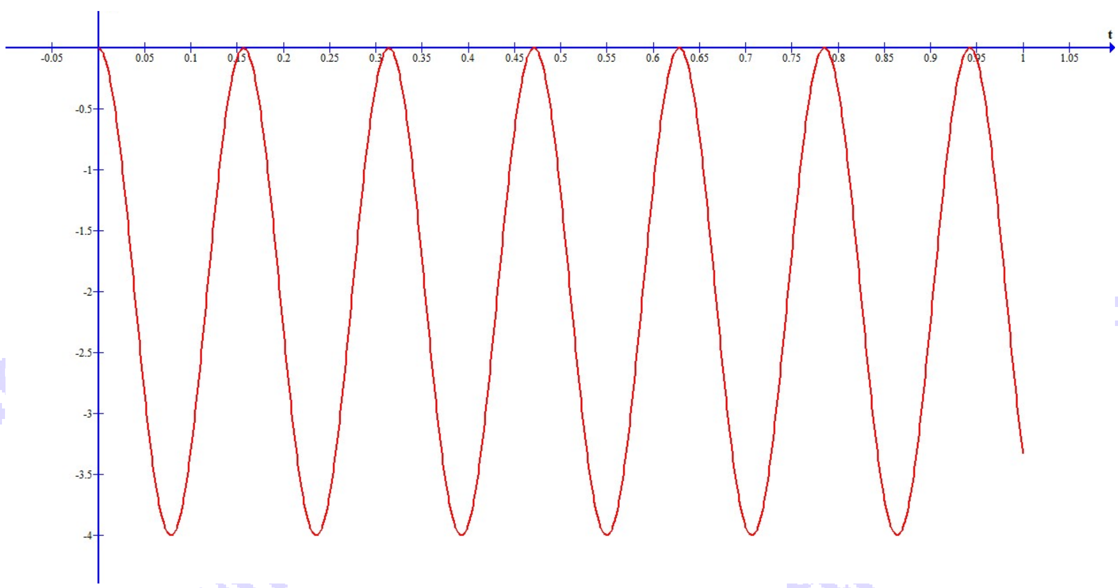
2. Έχει τη διεύθυνση του άξονα x με φορά αντίθετη της γωνιακής ταχύτητας



3. $\tau = -\frac{\omega A^2 B^2}{R} ημ^2 \omega t$ και με αντικατάσταση τελικά:

$\tau = -4 \cdot 10^{-3} ημ^2 20t$ (3)

τ 10^{-3}Nm



4. Η ενεργός ένταση του ρεύματος θα είναι: $i_{εν} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = \frac{4\cdot10^{-4}}{\sqrt{2}}A$

Η μέση ισχύς θα είναι: $\bar{P} = i_{εν}^2 R = 4\cdot10^{-2}W$

5. Αφού η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι: $I = \frac{1}{2}Mr^2$ με αντικατάσταση προκύπτει:

$I = \frac{\pi}{2}10^{-3}kgm^2$.

Από την (3) βρίσκουμε τη ροπή τη χρονική στιγμή t= π/8 s

$$\tau = -4\cdot10^{-3}ημ^2 20\frac{\pi}{8} = -4\cdot10^{-3}Nm$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση έχουμε:

$\alpha_γ = \frac{\tau}{I}$ και με αντικατάσταση: $\alpha_γ = \frac{-4\cdot10^{-3}}{\frac{\pi}{2}10^{-3}} = -\frac{8}{\pi}\frac{rad}{s^2}$

Β.

1. Ο δορυφόρος εκτελεί κυκλική τροχειά υπό την επίδραση της βαρύτητας, το μέτρο της δύναμης που του ασκείται είναι $F = G\frac{M_{Γής}m_{Δορ}}{r^2}$ και της επιτάχυνσης $a = \frac{\upsilon^2}{r}$

Για το δορυφόρο από το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα έχουμε $\Sigma F = ma \Rightarrow G\frac{M_{Γής}m_{Δορ}}{r^2} = m_{Δορ}\frac{\upsilon^2}{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{GM_{Γής}}{r}}} \quad (1)$$

Σε μια περιφορά που εκτελεί ο δορυφόρος σε χρόνο Τ με ταχύτητα υ η απόσταση που διανύει είναι 2πr, οπότε $\upsilon = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T\upsilon = 2\pi r \overset{(1)}{\Rightarrow} T\sqrt{\frac{GM_{Γής}}{r}} = 2\pi r \Rightarrow \boxed{r = \left(\frac{GM_{Γής}T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$

Η απόσταση που βρίσκεται ο δορυφόρος από την επιφάνεια της γης θα είναι

$H = r - R_{Γής} = 26609643{,}4 - 6371\times10^3 = 20238643{,}4\text{m} \approx 20{,}000\text{km}$

2.

Αντικαθιστώντας τις τιμές στη σχέση που συνδέει τη χρονική διάρκεια θα έχουμε:

$$\Delta t_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma} = \Delta t_{\Delta o\rho}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{GM_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma}}{r_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma}}-\frac{GM_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma}}{r_{\Delta o\rho}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \Delta t_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma} = \Delta t_{\Delta o\rho}\left[1-\frac{1}{(299792458)^2}\left(\frac{6,67384\times10^{-11}\times5,9736\times10^{24}}{6371\times10^3}-\frac{6,67384\times10^{-11}\times5,9736\times10^{24}}{26609643,4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \Delta t_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma} = \Delta t_{\Delta o\rho}\left(1-5,29423\times10^{-10}\right)$$

Η πηγή που εκπέμπει το σήμα είναι ο δορυφόρος, άρα ως προς αυτή πρέπει να γίνει η διόρθωση:

$$\frac{\Delta t_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma}-\Delta t_{\Delta o\rho}}{\Delta t_{\Delta o\rho}} = -5,29423\times10^{-10}$$

Το κλάσμα $\frac{\Delta t_{\Gamma\acute{\eta}\varsigma}}{\Delta t_{\Delta o\rho}}$ είναι μικρότερο της μονάδας πράγμα που σημαίνει πως η χρονική διάρκεια που μετρά ο δέκτης GPS στη γη είναι μικρότερη από αυτή που μετρά το ρολόι του δορυφόρου. Για ένα ρολόι που βρίσκεται πιο κοντά σε μια πηγή βαρύτητας ο χρόνος περνά με βραδύτερο ρυθμό σε σχέση με ένα άλλο ίδιο ρολόι που βρίσκεται πιο μακριά από την ίδια πηγή βαρύτητας.

Θέμα 2^o

Α. Η ν-οστή σελίδα του Β δέχεται δύο δυνάμεις τριβής $f_{νπ}$ από την πάνω σελίδα του Α και $f_{νκ}$ από την κάτω σελίδα του Α. Έτσι για να βγει η ν-οστή σελίδα χρειάζεται δύναμη:

$$F_ν = f_{νπ} + f_{νκ} \quad (1)$$

Η νιοστή σελίδα του Β έχει από πάνω της ν-1 σελίδες του Β και ν-1 σελίδες του Α. Έτσι:

$$f_{νπ}=2(ν-1)\mu mg \quad (2) \qquad \text{και} \qquad f_{νκ}=(2ν-1)\mu mg \quad (3)$$

Όπου m η μάζα κάθε σελίδας η οποία είναι m=1000(g) /200=5g

Έτσι από τις (2) και (3) ή (1) μας δίνει:

$$F_ν=2ν\mu mg-2\mu mg+2ν\mu mg+2ν\mu mg-\mu mg \quad \text{δηλαδή:}$$

$$F_ν=(4ν-3)\mu mg \quad (4)$$

Η ζητούμενη δύναμη θα είναι: $F_{min}=F_1+F_2+\cdots+F_{200}$ και επειδή πρόκειται για όρους αριθμητικής προόδου

$$F_{\min} = \frac{F_1+F_{200}}{2}200 \qquad (5)$$

Αλλά από την (4) $F_1=\mu mg$ και $F_{200}=797\mu mg$

Έτσι αντικαθιστώντας στην (5) βρίσκουμε ότι:

$F_{min}=79800\mu mg$ και με αντικατάσταση των τιμών τελικά έχουμε ότι:

$F_{min}=79800 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}005(kg) \cdot 9{,}8\ (m/s^2) = 1173\ (N)$

Β.

1. Έστω I' η ροπή αδράνειας της ελαττωματικής ράβδου ως προς το Ο και I η ροπή αδράνειας της ράβδου χωρίς ελάττωμα. Τότε θα είναι:

$$I' + mx^2 = I \Rightarrow I' = \frac{1}{3}ML^2 - mx^2 \quad (1).$$

Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας σε απόσταση L κάτω από την οριζόντια θέση της ράβδου. Στη θέση Α η δυναμική ενέργεια της ελαττωματικής ράβδου θα είναι $U'_{\beta\alpha\rho(A)} = (M - m)gL$. Στη θέση Β η δυναμική ενέργεια της ράβδου χωρίς ελάττωμα θα είναι: $U_{\beta\alpha\rho(B)} = MgL/2$. Στη θέση Β η δυναμική ενέργεια της ελαττωματικής ράβδου θα είναι έστω $U'_{\beta\alpha\rho(B)}$. Τότε:

$$U_{\beta\alpha\rho(B)} = U'_{\beta\alpha\rho(B)} + mg(L - x) \Rightarrow U'_{\beta\alpha\rho(B)} = \frac{1}{2}MgL - mg(L-x) \quad (2).$$

Ανάμεσα στις θέσεις Α και Β ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας:

$$E_{MHX(A)} = E_{MHX(B)} \Rightarrow K_{(A)} + U'_{\beta\alpha\rho(A)} = K_{(B)} + U'_{\beta\alpha\rho(B)} \Rightarrow 0 + (M - m)gL =$$

$$\frac{1}{2}I'\omega^2 + \frac{1}{2}MgL - mg(L-x) \Rightarrow MgL - mgL = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 - mx^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}MgL - mgL + mgx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}MgL - mgx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 - mx^2\right)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{MgL - 2mgx}{\frac{1}{3}ML^2 - mx^2}} \quad (3).$$

2. Κατά την κρούση θα ισχύει η διατήρηση της κινητικής ενέργειας επειδή η κρούση είναι ελαστική:

$$K_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon(\pi\rho\iota\nu)} = K_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} + K_{m1(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \Rightarrow \frac{1}{2}I'\omega^2 = 0 + \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 \Rightarrow I'\omega^2 = m_1\upsilon^2 \quad (4).$$

Επίσης θα ισχύει η διατήρηση της στροφορμής του συστήματος ως προς το Ο:

$$I'_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon(\pi\rho\iota\nu)} = I'_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} + I_{m1(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \Rightarrow I'\omega = 0 + m_1\upsilon L \Rightarrow I'\omega = m_1\upsilon L \quad (5).$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (4) και (5) έχουμε: $\omega = \frac{\upsilon}{L} \Rightarrow \upsilon = \omega L \Rightarrow \upsilon = L\sqrt{\frac{MgL - 2mgx}{\frac{1}{3}ML^2 - mx^2}}$ (6).

3. Αντικαθιστώντας την (6) στην (5) έχουμε:

$$I'\omega = m_1\omega LL \Rightarrow I' = m_1L^2 \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2 - mx^2 = m_1L^2 \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2 - m_1L^2 = mx^2 \Rightarrow \left(\frac{M}{3} - m_1\right)L^2 = mx^2 \Rightarrow$$

$$x = L\sqrt{\frac{\frac{M}{3} - m_1}{m}} \quad (7).$$

4. Από την (7) έχουμε για τη μάζα m_1 που πρέπει να τοποθετήσουμε ώστε η ράβδος να ακινητοποιηθεί μετά την κρούση:

$$\frac{1}{3}ML^2 - m_1L^2 = mx^2 \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2 - mx^2 = m_1L^2 \Rightarrow m_1 = \frac{M}{3} - m\left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad (8).$$

Οι ακραίες τιμές του *x* είναι 0 και *L*. Για *x*=0, έχουμε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η μάζα m_1:

$m_1 = \frac{M}{3}$. Για *x*=*L*, έχουμε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η μάζα m_1: $m_1 = \frac{M}{3} - m$.

Θέμα 3ο

1. Η ενέργεια που ελευθερώνεται κατά τη σύντηξη σύμφωνα με την εξίσωση του Einstein είναι:

$$E_0 = (m_D + m_T - m_{He} - m_n)c^2 = 2{,}973\cdot 10^{-12}\ J.$$

2. Η ενέργεια αυτή σε ηλεκτρονιοβόλτ είναι:

$$E_0 = 2.973\cdot 10^{-12}/1.6022\cdot 10^{-19} = 1{,}856\cdot 10^{7}\ eV.$$

3. Οι ενέργειες των προϊόντων θα είναι:

$$K_n = \frac{1}{2}m_n v_n^2 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad K_{He} = \frac{1}{2}m_{He}v_{He}^2 \quad (2)$$

Αλλά από την αρχή διατήρησης της ορμής και αφού θεωρούμε ότι λίγο πριν την σύντηξη τα αντιδρώντα δεν είχαν κινητική ενέργεια συνεπώς και ορμή, από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$m_n v_n = m_{He}v_{He} \quad \text{από την οποία} \quad v_{He} = \frac{m_n v_n}{m_{He}} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) έχουμε: $K_{He} = \frac{1}{2}m_{He}\frac{m_n^2 v_n^2}{m_{He}^2} = \frac{1}{2}\frac{m_n^2 v_n^2}{m_{He}}$ (4)

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (4) έχουμε:

$$\frac{K_n}{K_{He}} = \frac{m_{He}}{m_n} \quad (5)$$

Από την οποία :

$$\frac{K_n + K_{He}}{K_{He}} = \frac{m_{He} + m_n}{m_n} \quad (6)$$

και

$$\frac{K_n+K_{He}}{K_n}=\frac{m_{He}+m_n}{m_{He}} \quad (7)$$

Αλλά $K_n+K_{He}=K_0$ (8)

Από την (8) και την (6) έχουμε:

$$K_{He}=\frac{m_{He}}{m_{He}+m_n}K_0=2{,}375\cdot 10^{-12}J=1{,}482\cdot 10^{7}eV$$

Από την (8) και την (7) έχουμε:

$$K_n=\frac{m_n}{m_{He}+m_n}K_0=5{,}984\cdot 10^{-13}J=3{,}735\cdot 10^{6}eV$$

4. Για να υπερνικηθεί η άπωση Coulomb μεταξύ των αντιδρώντων πυρήνων ώστε να βρεθούν σε μια απόσταση $a=10^{-14}\,\mathrm{m}$ όπου υπερισχύουν οι ελκτικές ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις θα πρέπει:

$$\frac{3}{2}k_B T=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

Από την οποία προκύπτει ότι: $T=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 a k_B}=1{,}115\cdot 10^{9}$K

5. Με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης παίρνουμε: $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Η θερμική πίεση του πλάσματος είναι:

$$P_{\theta\varepsilon\rho\mu}=4nk_BT \quad (9)$$

και θα πρέπει να αντισταθμιστεί από την μαγνητική πίεση:

$$P_{\mu\alpha\gamma\nu}=\frac{B^2}{2\mu_0} \quad (10)$$

Δηλαδή: $P_{\theta\varepsilon\rho\mu}=P_{\mu\alpha\gamma\nu}$ Αντικαθιστώντας τις (9) και (10) και λύνοντας ως προς Β έχουμε: $B=2\sqrt{2\mu_0 nk_BT}$=1,178T

<u>Πειραματικό Μέρος</u>

1. Μετράμε το χρόνο διέλευσης *t* του κυλίνδρου ο οποίος έχει μήκος *d*=4,9 cm και υπολογίζουμε την ταχύτητα *υ=d/t*

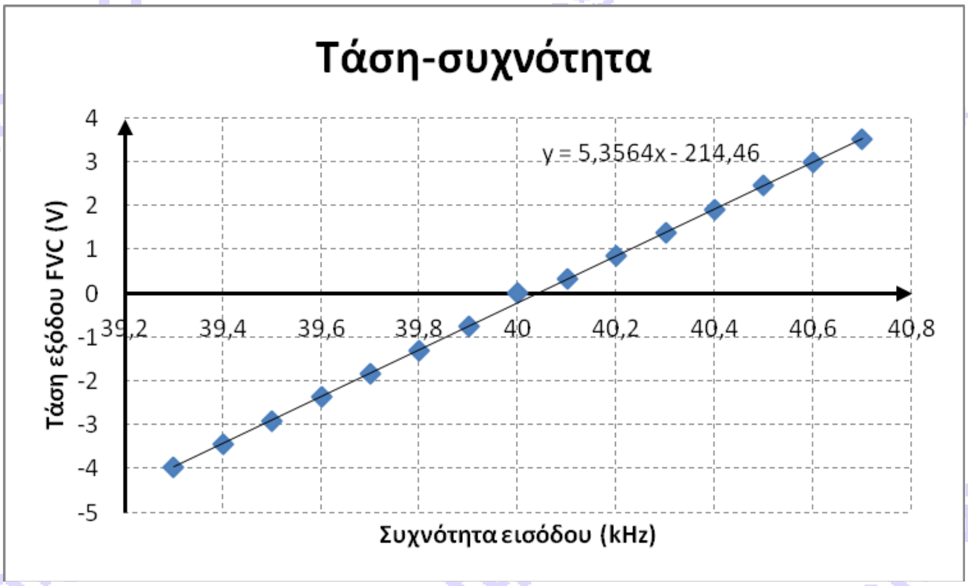
2. Σύμφωνα με τις σχέσεις του φαινομένου Doppler έχουμε:

$$f_1=\frac{u}{u-\upsilon_1}f \qquad f_2=\frac{u}{u+\upsilon_2}f \qquad \text{οπότε:}\quad \Delta f=\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{(u-\upsilon_1)(u+\upsilon_2)}uf$$

Επειδή όμως $u\gg\upsilon_1$ και $u\gg\upsilon_2$

$$\Delta f\approx\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{u}f \quad (1)$$

3. Από το γράφημα τάσης- συχνότητας βρίσκουμε την κλίση k≈5,36V/kHz



Οπότε $\frac{\Delta V}{\Delta f} = k$ συνεπώς $\Delta f = \frac{\Delta V}{k}$ (2)

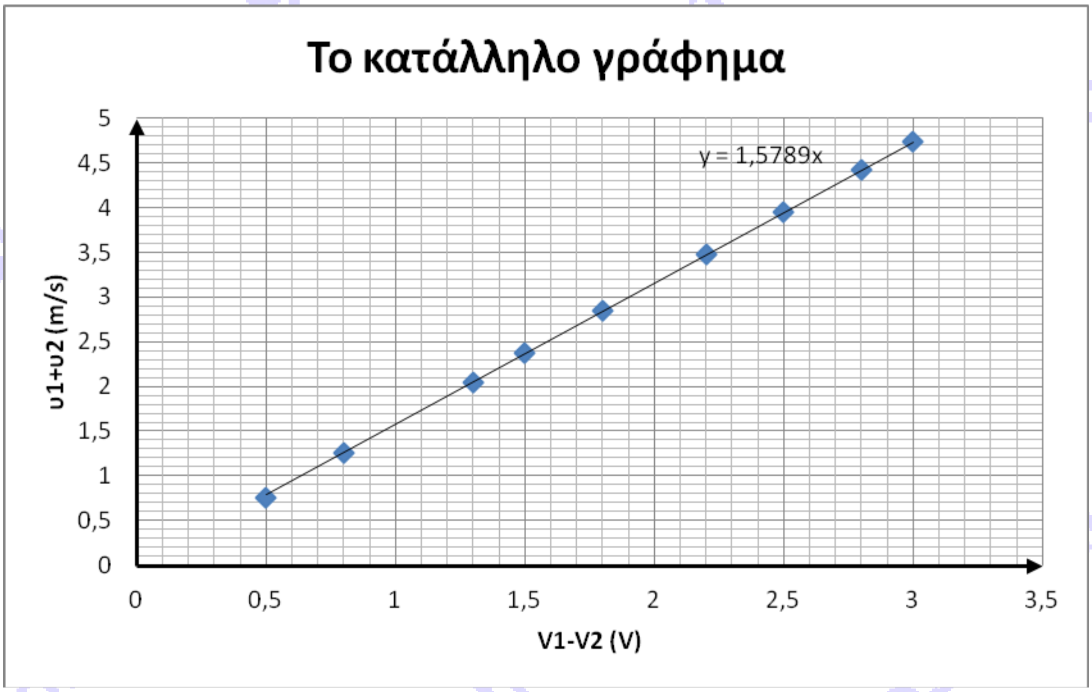
Η εξίσωση (1) με τη βοήθεια της (2) δίνει: $\frac{\Delta V}{k} \approx \frac{v_1 + v_2}{u} f$

$$\Delta V \approx \frac{v_1 + v_2}{u} k f \quad (3)$$

4. Από την (3) $v_1 + v_2 \approx \frac{V_1 - V_2}{k} \frac{u}{f}$

δηλαδή $v_1 + v_2 \approx \frac{u}{kf}(V_1 - V_2)$ (4)

Από την (4) προκύπτει ότι το κατάλληλο γράφημα από το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε από τα πειραματικά δεδομένα την ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι το παρακάτω:



Η κλίση στο γράφημα αυτό είναι: $\lambda = \frac{u}{kf}$ (5)

Επειδή η κλίση είναι λ=1,58 m/sV και kf=5,36V/kHz 40kHz= 214V

Έχουμε: u=1,58·214 ≈338m/s.