Γ΄ Λυκείου

9 Μαρτίου 2013

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1^o

Α. Δύο πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αρμονικών κυμάτων διεγείρουν τα σημεία επίπεδου ελαστικού μέσου. Έστω Α το πλάτος ταλάντωσης κάθε πηγής, f η συχνότητα ταλάντωσής της και λ το μήκος κύματος των κυμάτων που παράγονται. Να βρείτε μια έκφραση του πλάτους ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου συναρτήσει της διαφοράς φάσης Δφ των $Π_1$ και $Π_2$.

Β. Οι μαθητές ενός σχολείου πηγαίνουν εκδρομή στη λίμνη της Καστοριάς. Εκεί παίζουν διάφορα παιχνίδια, φωτογραφίζονται χρησιμοποιώντας τα κινητά τους τηλέφωνα και, μετά το μεσημεριανό φαγητό, ρίχνουν πέτρες στην ήρεμη επιφάνεια της λίμνης, συναγωνιζόμενοι μεταξύ τους ποιος θα πετάξει τη δική του πέτρα μακρύτερα. Στην πορεία του παιχνιδιού αναρωτιούνται αν υπάρχει τρόπος να μετρήσουν, έστω και κατά προσέγγιση, την απόσταση από την ακτή του σημείου όπου πέφτει η πέτρα. Ψάχνοντας στα πράγματά τους, διαπιστώνουν ότι διαθέτουν χάρακα του ενός μέτρου, ενώ τα κινητά τους, εκτός από φωτογραφική μηχανή, διαθέτουν και χρονόμετρο. Μπορείτε να τους προτείνετε μέθοδο μέτρησης;

.**Θέμα 2^o**

Α. Ένα αβαρές ελατήριο κρέμεται από την οροφή του εργαστηρίου φυσικής και στην άκρη του προσδένεται ένα σώμα μικρών διαστάσεων μάζας m_1. Το σώμα κρατιέται αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας σε μια τέτοια θέση ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος. Στη συνέχεια, αφήνεται ελεύθερο από τη θέση αυτή και εκτελεί Α.Α.Τ. Το χαμηλότερο σημείο της ταλάντωσης είναι 0,2m κάτω από την θέση που αφέθηκε το σώμα.

Α1. Ποια είναι η συχνότητα της ταλάντωσης;

Α2. Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν αυτό βρίσκεται 0,16m κάτω από την αρχική του θέση;

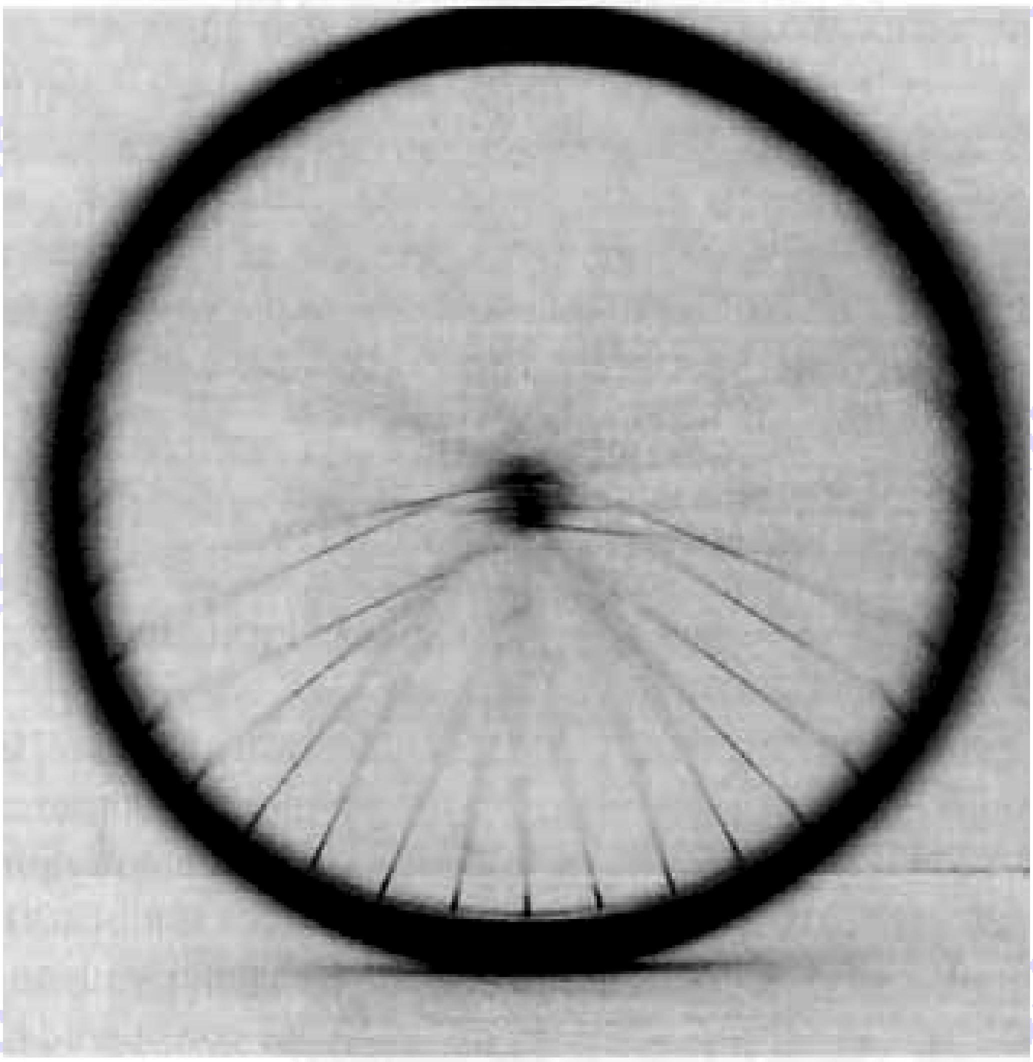
Α3. Ένα σώμα μάζας m_2=0,6Kg προσδένεται στο πρώτο σώμα, και το σύστημα από τη στιγμή αυτή εκτελεί ταλάντωση με συχνότητα ίση με το μισό της αρχικής συχνότητας. Πόση η μάζα m_1 του πρώτου σώματος;

Δίνεται $g=10m/s^2$

Β. Στη φωτογραφία φαίνεται τροχός ποδηλάτου ο οποίος εκτελεί κύλιση σε οριζόντιο επίπεδο.

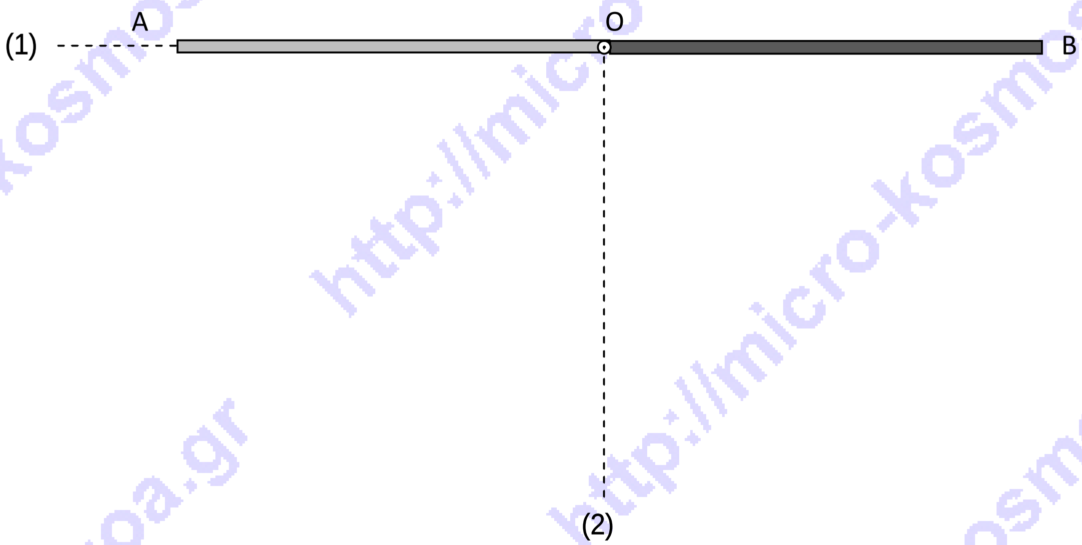
Β1. Σχολιάστε σύντομα τη φωτογραφία.

Β2. Υποθέστε ότι ο τροχός αρχίζει να ανέρχεται σε κεκλιμένο επίπεδο. Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει επηρεάζεται από το αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο ή όχι και πως; Εξηγήστε την απάντησή σας.



Θέμα 3^o

Δύο ομογενείς ελαστικές πρισματικές ράβδοι με αμελητέο πλάτος, η ΟΑ και η ΟΒ, έχουν τις ίδιες ακριβώς διαστάσεις και μάζες αντίστοιχα $M_{OA} = M_1 = 1$ kg και $M_{OB} = M_2 = 3$ kg. Το μήκος κάθε ράβδου είναι l = 1,2 m και οι δύο ράβδοι μπορούν (λόγω του αμελητέου πλάτους τους) να στρέφονται χωρίς τριβές στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κοινό τους άκρο Ο και είναι κάθετος στη διεύθυνσή τους.



Κρατάμε αρχικά τις ράβδους στην οριζόντια διεύθυνση (1) και τις αφήνουμε ελεύθερες ταυτόχρονα χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε κάποια στιγμή οι ράβδοι συγκρούονται ελαστικά.

α. Να αποδείξετε ότι οι δύο ράβδοι φτάνουν ταυτόχρονα στην κατακόρυφη διεύθυνση, όπου και συγκρούονται.

β. Θεωρώντας ότι η κρούση των δύο ράβδων αρχίζει και τελειώνει στην κατακόρυφη διεύθυνση (δηλ. δε στρέφονται όσο διαρκεί η κρούση τους), να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιακών τους ταχυτήτων αμέσως μετά την κρούση.

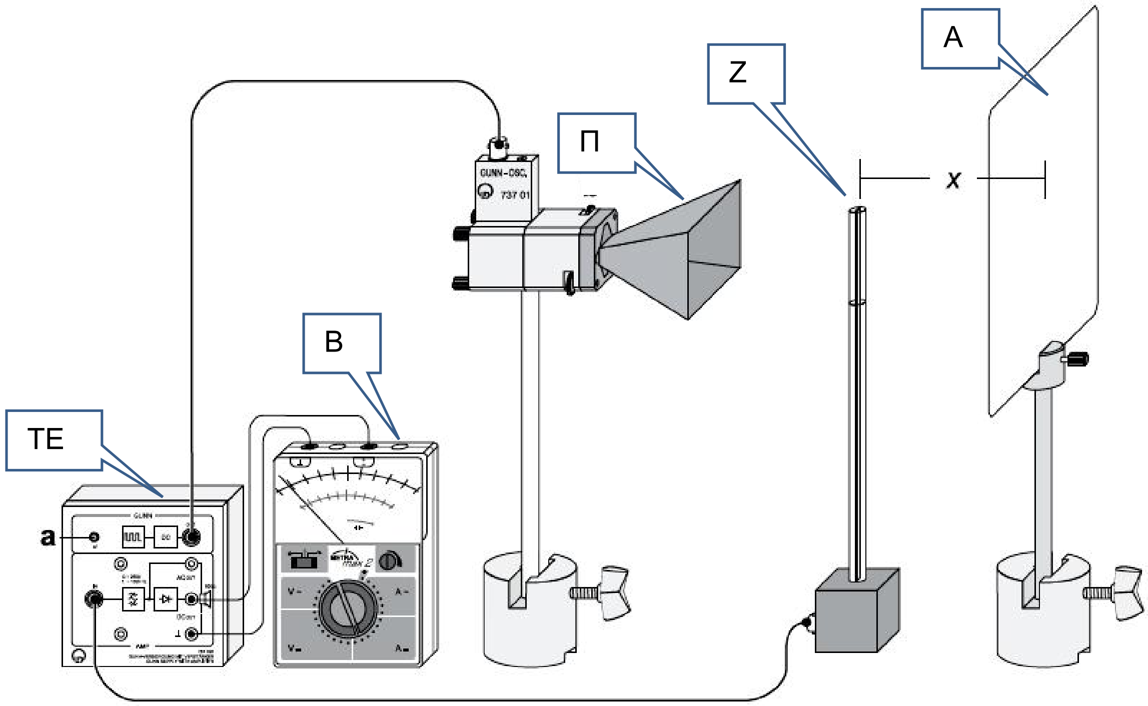
γ. Ποια είναι η μέση (κατά μέτρο) ροπή που δέχθηκε η ράβδος ΟΑ κατά την κρούση, αν η χρονική διάρκεια της κρούσης αυτής είναι Δt = 0,05 s.

δ. Να εξετάσετε αν, μετά την κρούση, η ράβδος ΟΑ θα πραγματοποιήσει, ανακύκλωση.

Δίνονται: Η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2 και η ροπή αδράνειας ομογενούς πρισματικής ράβδου μάζας M και μήκους L, ως προς άξονα κάθετο στη διεύθυνσή της και διερχόμενο από το ένα άκρο της $I = \frac{1}{3}ML^2$.

<u>Πειραματικό Μέρος</u>

Στη διάταξη που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένας πομπός μικροκυμάτων Π είναι συνδεδεμένος σε μία έξοδο κατάλληλου τροφοδοτικού / ενισχυτή ΤΕ. Σε απόσταση 200 mm από τον πομπό τοποθετείται μια μεταλλική πλάκα Α (ανακλαστήρας) η οποία βρίσκεται στη θέση x=0. Μεταξύ του πομπού και του ανακλαστήρα μπορεί να κινείται ένας αισθητήρας ηλεκτρικού πεδίου Ζ. Ο αισθητήρας Ζ είναι συνδεδεμένος στην είσοδο του ενισχυτή ΤΕ. Στην έξοδο συνεχούς του τροφοδοτικού / ενισχυτή ΤΕ συνδέεται βολτόμετρο Β του οποίου οι ενδείξεις είναι ανάλογες του τετραγώνου της έντασης Ε του ηλεκτρικού πεδίου, μέσα στο οποίο βρίσκεται ο αισθητήρας.



Με σκοπό να βρούμε το μήκος κύματος μικροκυμάτων τα οποία εκπέμπονται από τον πομπό Π καταγράφουμε την ένδειξη του βολτομέτρου *V* και τις αντίστοιχες θέσεις x του αισθητήρα Ζ. Ξεκινάμε από τη θέση *x* = -50 mm έως τη θέση *x* = -150 mm μετακινώντας τον αισθητήρα Ζ κατά 5 mm κάθε φορά. Οι μετρήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

***x* (mm)**	***V* (mV)**
-50	1000
-55	2600
-60	4900
-65	2400
-70	1400
-75	5250
-80	3850
-85	560
-90	4900
-95	5250

-100	1200
-105	4200
-110	6100
-115	2800
-120	3550
-125	7000
-130	5200
-135	2450
-140	6000
-145	6300
-150	2850

Επίσης βρίσκουμε τις θέσεις και τις ενδείξεις του βολτομέτρου σε επτά διαδοχικά ελάχιστα και επτά διαδοχικά μέγιστα τους, οι οποίες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα 2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

	***x* (mm)**	***V* (mV)**
1^o ελάχιστο	-52	52
2^o ελάχιστο	-68	170
3^o ελάχιστο	-84	390
4^o ελάχιστο	-100	910
5^o ελάχιστο	-117	1550
6^o ελάχιστο	-134	2100
7^o ελάχιστο	-151	2600
1^o μέγιστο	-60	4900
2^o μέγιστο	-77	5400
3^o μέγιστο	-93	5800
4^o μέγιστο	-109	6150
5^o μέγιστο	-125	7000
6^o μέγιστο	-141	6650
7^o μέγιστο	-159	6700

α) Να κάνετε το γράφημα *V-x* λαμβάνοντας υπόψη όλες τις τιμές των πινάκων 1 και 2. Να χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ που θα βρείτε σε ξεχωριστό φύλλο των εκφωνήσεων, το οποίο θα παραδώσετε μαζί με τις απαντήσεις σας.

β) Εξηγήστε τη μορφή του γραφήματος.

γ) Υπολογίστε το μήκος κύματος και τη συχνότητα των μικροκυμάτων. Δίνεται $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Καλή Επιτυχία

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε κάποιο γράφημα σ' αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες, τιτλοδοτήστε και συμπεριλάβετε τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα

Συνοπτικές Απαντήσεις
Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο:
Α.
Ξεκινάμε γράφοντας της εξισώσεις των κυμάτων που παράγουν οι πηγές:

$$y_1 = Ahm\left[2p\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{r}_1}{\lambda}\right)\right]$$

και

$$y_2 = Ahm\left[2p\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{r}_2}{\lambda}\right) + \Delta f\right]$$

όπου r_1 και r_2 οι αποστάσεις από τις Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Η στιγμιαία απομάκρυνση κάθε σημείου του ελαστικού μέσου ως προς το χρόνο θα δίνεται από τη σχέση:

$$y_{ol} = y_1 + y_2 = Ahm\left[2p\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{r}_2}{\lambda}\right)\right] + Ahm\left[2p\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{r}_2}{\lambda}\right) + \Delta f\right] \Rightarrow$$

$$y_{ol} = A\left[hm\left[2p\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{r}_2}{\lambda}\right)\right] + hm\left[2p\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{r}_2}{\lambda}\right) + \Delta f\right]\right] \Rightarrow$$

Εφαρμόζουμε την Τριγωνομετρική Ταυτότητα για το άθροισμα των ημιτόνων οπότε προκύπτει:

$$y_{ol} = 2Asun\left[2p\,\frac{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}{2\lambda} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right] \cdot hm\left[2p\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2}{2\lambda}\right) + \frac{\Delta f}{2}\right] \Rightarrow$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη ζητούμενη έκφραση:

$$\mathrm{A}' = 2Asun\left[2p\,\frac{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}{2\lambda} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right]$$

Β.
Με το χρονόμετρο μετράμε το χρόνο t_1 από τη στιγμή που έπεσε η πέτρα στο νερό μέχρι να φθάσει το κύμα στην ακτή. Μπορούμε επίσης να μετρήσουμε τον αριθμό *n* των κορυφών που καταφθάνουν στην αυτή σε συγκεκριμένο χρόνο t_2.

Επίσης μπορούμε κατά προσέγγιση να μετρήσουμε με τη χρήση του χάρακα την απόσταση δύο κορυφών ή δύο κοιλάδων των κυμάτων που καταφθάνουν δηλαδή το μήκος κύματος *λ*. Η μέτρηση αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά προσέγγιση με το χάρακα και με το μάτι ή αν φωτογραφήσουμε από πάνω τα κύματα που φτάνουν στην ακτή, έχοντας τοποθετήσει το χάρακα μέσα στο πλάνο.

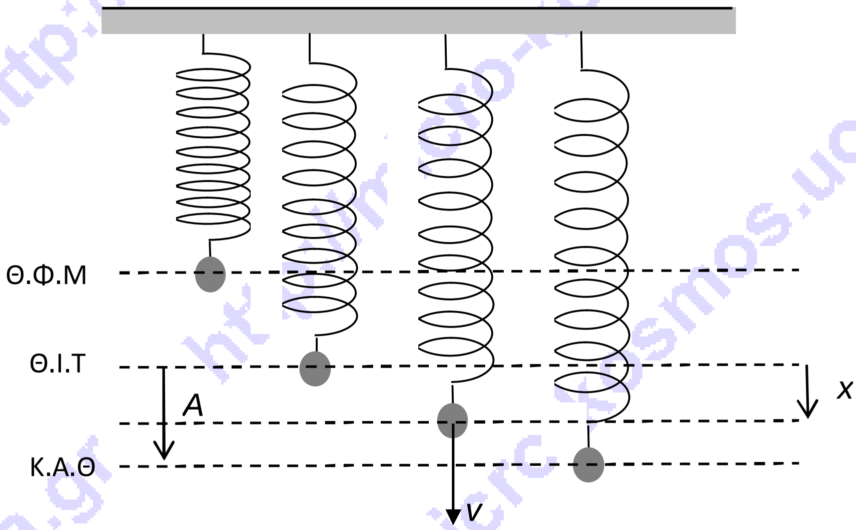
Αν x η ζητούμενη απόσταση, προφανώς $x = vt_1$

όπου $v = \lambda f$ αλλά $f = \frac{n}{t_2}$ έτσι $v = \frac{\lambda n}{t_2}$

οπότε: $x = \frac{\lambda n t_1}{t_2}$

Θέμα 2°

Α1. Η αρχική θέση στο φυσικό μήκος Θ.Φ.Μ και η θέση στο χαμηλότερο σημείο της ταλάντωσης, είναι οι ακραίες θέσεις οι οποίες ισαπέχουν από τη θέση ισορροπίας Θ.Ι. της ταλάντωσης. Έτσι το πλάτος θα είναι A=0,1m



Από τη συνθήκη ισορροπίας: $m_1 g = KA$ οπότε: $\frac{K}{m_1} = \frac{g}{A}$ (1)

Η συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι:

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m_1}}$ οπότε από την (1) $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}$ στην οποία αντικαθιστώντας βρίσκουμε: $f = \frac{5}{\pi} Hz$

Α2. Όταν βρίσκεται 0,16 m κάτω από την αρχική θέση του φυσικού μήκους η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας θα είναι: x=0,06m.

Η ταχύτητα εκεί θα είναι: $v = \sqrt{\frac{K}{m_1}}\sqrt{A^2 - x^2}$ δηλαδή:

$v = \sqrt{\frac{g}{A}}\sqrt{A^2 - x^2}$ στην οποία αντικαθιστώντας βρίσκουμε: v=0,8m/s

Α3. Η νέα συχνότητα θα είναι $f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}$ (2)

Επειδή $f'=f/2$ από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $m_1 = \frac{m_2}{3}$ δηλαδή m_1=0,2Kg

Β1. Παρατηρούμε ότι στο πάνω μέρος της φωτογραφία ο τροχός εμφανίζεται θολός και οι ακτίνες του ούτε που διακρίνονται. Στο κάτω μέρος, αντίθετα, τα περιγράμματα είναι πιο σαφή. Επαληθεύεται λοιπόν αυτό που ήδη γνωρίζουμε από τη θεωρία, ότι σε τροχό που εκτελεί κύλιση η ταχύτητα των σημείων της περιφέρειάς του είναι μεγαλύτερη στο πάνω μέρος του (για παράδειγμα το ανώτερο σημείο έχει ταχύτητα ως προς την κάμερα διπλάσια της $υ_{CM}$) από εκείνη στο κατώτερο σημείο (για παράδειγμα το κατώτατο σημείο που έρχεται σε επαφή με το έδαφος έχει ταχύτητα ως προς την κάμερα μηδέν).

Αν εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας και στις ακτίνες του τροχού, τότε, στο κάτω μισό της φωτογραφίας παρατηρούμε ότι ευκρινές είναι μόνο τμήμα μιας ακτίνας και όχι ολόκληρη. Αν και στόχος του θέματος ήταν - όπως αναφέρεται και στην εκφώνηση - ένας σύντομος σχολιασμός (μια ενδεικτική διατύπωση του οποίου διατυπώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο), αξίζει να αναφερθεί ότι τα σημεία των ακτίνων που διακρίνονται, έχουν ταχύτητες με διεύθυνση που ταυτίζεται με τον προσανατολισμό της υπό μελέτη ακτίνας.

Β2. Στο λείο κεκλιμένο αφού δεν ασκείται τριβή στον τροχό αυτός δεν δέχεται ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής και η γωνιακή του ταχύτητα διατηρείται σταθερή έτσι: $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh_1 + \frac{1}{2}I\omega^2$ οπότε

$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgh_1$ (1)

Στο κεκλιμένο επίπεδο με τριβή ο τροχός θα δεχθεί τριβή η ροπή της οποίας μειώνει τη γωνιακή του ταχύτητα. Θεωρώντας ότι ο τροχός συνεχίζει να κυλίεται ανεβαίνοντας θα ισχύει $v_{cm} = \omega R$ οπότε τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα μηδενιστεί και η γωνιακή της ταχύτητα. Αλλά η στατική τριβή δεν εκτελεί έργο οπότε :

$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh_2$ (2)

Από τις (1) και (2) βλέπουμε ότι $h_2 > h_1$.

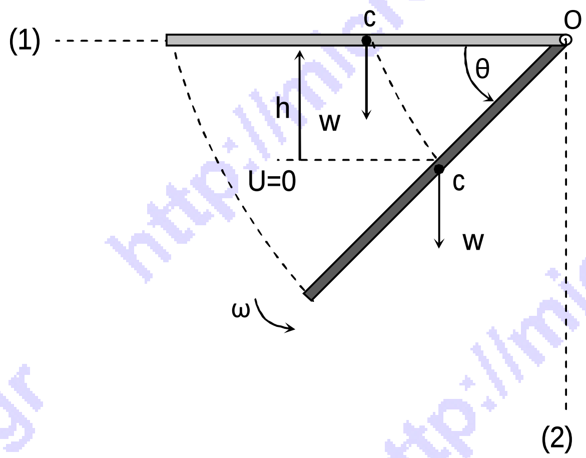
Θέμα 3ο

α. Υπολογίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου ΟΑ σε συνάρτηση με τη γωνία στροφής της από την αρχική της οριζόντια θέση (1).

$E_{μηχ} = E_{μηχ(\theta)}$, ή: $U_{(1)} = K_{(\theta)}$, ή: $M_1gh = \frac{1}{2}I_1\omega^2$, ή: $M_1g\frac{\mathbf{l}}{2}ημ\theta = \frac{1}{2}\frac{1}{3}M_1\mathbf{l}^2\omega^2$, οπότε:

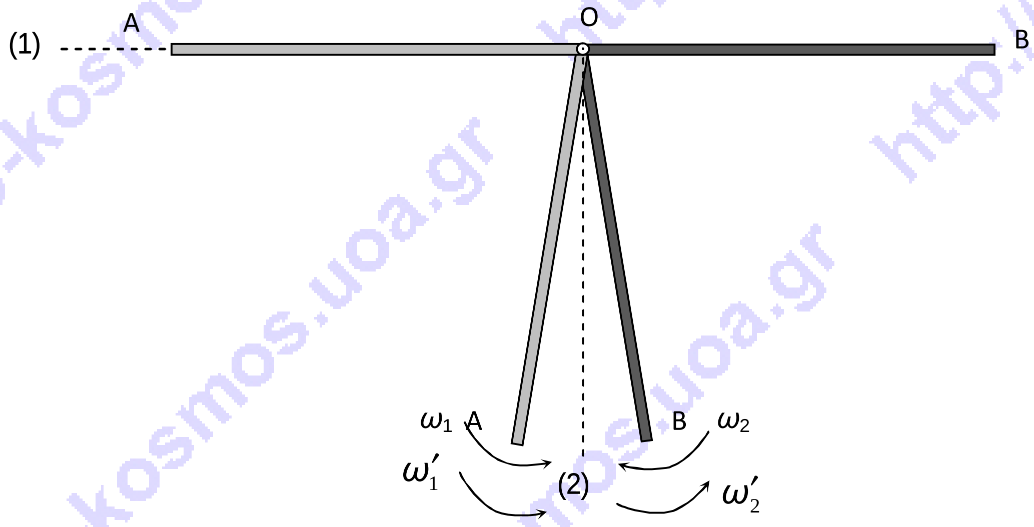
$$\omega = \sqrt{\frac{3gημq}{\mathbf{l}}} \quad (1).$$

Από την (1) προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι ανεξάρτητη της μάζας της. Από την (1) τελικά προκύπτει ότι κάθε στιγμή οι δύο ράβδοι, αφού έχουν ίδιο μήκος, θα έχουν ίδια γωνιακή ταχύτητα και άρα θα φτάσουν ταυτόχρονα στην κατακόρυφη διεύθυνση, όπου και θα συγκρουστούν.



β. Αν ω_1, ω_2 τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων των δύο ράβδων στην κατακόρυφη διεύθυνση (2) και ελάχιστα πριν συγκρουστούν, από την (1) προκύπτει (για $\theta = 90^o$) ότι: $\omega_1 = \omega_2 = 5$ r/s (2).

Έστω ω_1', ω_2' οι ταχύτητες των ράβδων ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση (τις θεωρούμε θετικές όπως επίσης και τη γωνιακή ταχύτητα της ΟΑ λίγο πριν την κρούση).



Κατά την κρούση διατηρείται η στροφορμή του συστήματος των δύο ράβδων (τα βάρη τους και η δύναμη του άξονα περιστροφής, τέμνουν τον άξονα αυτό) και η κινητική του ενέργεια. Έτσι έχουμε:

Από Α.Δ. $L_{συσ.}$: $L^{μετά}_{συσ.} = L^{πριν}_{συσ.}$, ή: $I_1\omega_1 - I_2\omega_2 = I_1\omega'_1 + I_2\omega'_2$,

ή, επειδή $I_2 = 3I_1$ και $\omega_1 = \omega_2$, τελικά: $\omega'_1 + 3\omega'_2 = -2\omega_1$ (3).

Από Α.Δ. $K_{συσ.}$: $K^{μετά}_{συσ.} = K^{πριν}_{συσ.}$, ή: $\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_1'^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2'^2$,

ή, επειδή $I_2 = 3I_1$ και $\omega_1 = \omega_2$, τελικά: $\omega_1'^2 + 3\omega_2'^2 = 4\omega_1^2$ (4).

Επειδή $\omega_1 = 5$ r/s, οι (3) και (4) τελικά γράφονται:

$\omega'_1 + 3\omega'_2 = -10$ (SI) (5)

$\omega_1'^2 + 3\omega_2'^2 = 100$ (SI) (6)

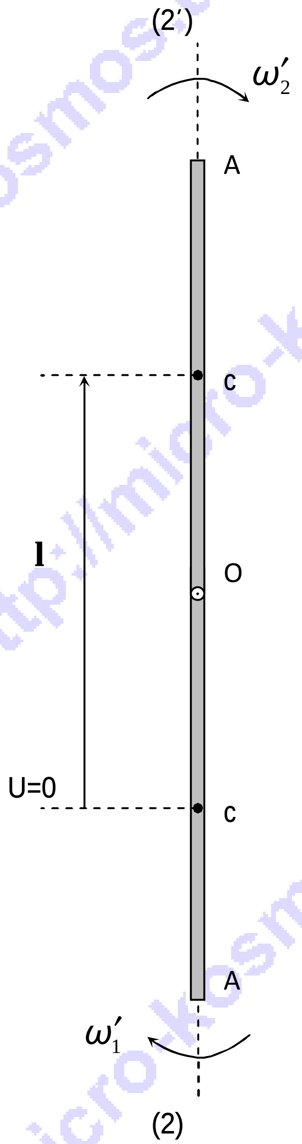
Η (6) λόγω της (5) γράφεται: $(-10-3\omega'_2)^2+3\omega_2'^2 = 100$, ή τελικά: $12\omega_2'^2 + 60\omega'_2 = 0$, ή: $\omega'_2(\omega'_2+5) = 0$ (7).

Οι λύσεις της (7) είναι: $\omega'_2 = 0$ ή $\omega'_2 = -5$ r/s. Η $\omega'_2 = -5$ r/s απορρίπτεται γιατί ταυτίζεται με τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου λίγο πριν την κρούση (η γωνιακή ταχύτητα της ΟΒ αλλάζει κατά την κρούση, αφού η ΟΒ δέχθηκε δύναμη και άρα ροπή από την ΟΑ). Άρα, τελικά: $\omega'_2 = 0$ και $\omega'_1 = -10$ r/s.

Επομένως: $|\vec{\omega}'_1| = 10$ r/s (8) και $|\omega'_2| = 0$ r/s (9).

γ. Με εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κίνησης για τη ράβδο ΟΑ στη διάρκεια της κρούσης έχουμε:

$\overline{T}_{OA} = \frac{\Delta L_{OA}}{\Delta t} = \frac{I_1 w'_1 - I_1|\vec{w}_1|}{\Delta t}$ ή $\overline{T}_{OA} = \frac{1}{3}M_1\mathbf{l}^2\frac{\omega'_1 - |\vec{\omega}_1|}{\Delta t}$ και με αντικατάσταση: $\overline{T}_{OA} = -144$ Nm, οπότε: $|\overline{T}_{OA}| = 144$ Nm.



δ. Για να κάνει η ράβδος ΟΑ ανακύκλωση αρκεί να φτάσει, μετά την κρούση, στη θέση (2΄) έχοντας $w_3 \geq 0$.

Βρίσκουμε την w_3 με Α.Δ.Μ.Ε. για την ΟΑ από τη θέση (2) στη (2΄).

$E_{μηχ(2)} = E_{μηχ(2΄)}$ ή $K_{(2)} = U_{(2΄)} + K_{(2΄)}$ ή:

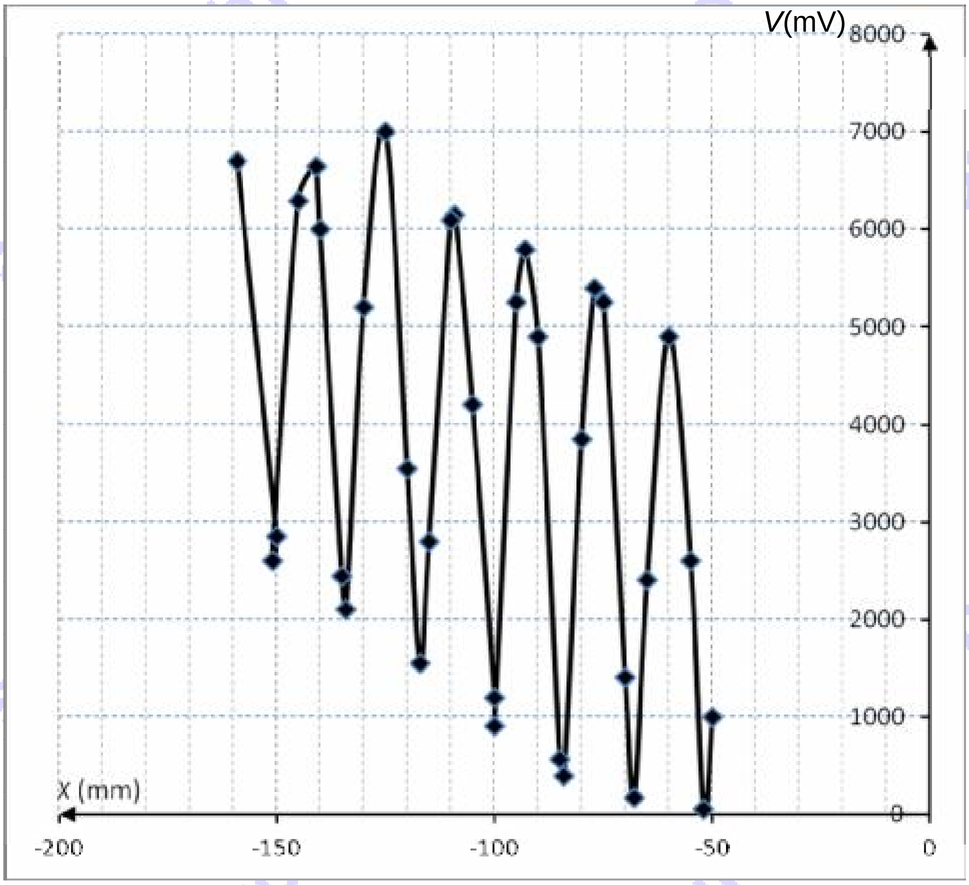
$$\frac{1}{2}I_1\omega_1'^2 = M_1 g\mathbf{l} + \frac{1}{2}I_1 w_3^2,$$

ή: $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\, M_1 \mathbf{l}^2 w_3^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\, M_1 \mathbf{l}^2 \omega_1'^2 - M_1 g \mathbf{l}$,

ή: $w_3 = \sqrt{\omega_1'^2 - \frac{6g}{\mathbf{l}}}$ και με αντικατάσταση: $w_3 = 5\sqrt{2}$ r/s. Άρα η ράβδος ΟΑ θα κάνει ανακύκλωση.

<u>Πειραματικό Μέρος</u>

α)



β) Το πλάτος των μικροκυμάτων μειώνεται καθώς αυξάνεται η απόσταση από τον πομπό συνεπώς το ίδιο συμβαίνει και με τα πλάτη στις κοιλίες του στάσιμου κύματος που δημιουργείται. Το ανακλώμενο στο x=0 κύμα έχει μικρότερη ένταση συνεπώς και πλάτος σε κάθε θέση x από το προσπίπτον και αυτό έχει ως συνέπεια τα ελάχιστα να μην είναι μηδενικά

γ) Η απόσταση μεταξύ πρώτου και έβδομου ελάχιστου είναι:

d = 151 mm – 52 mm = 99 mm

Αλλά $d = 6\frac{\lambda}{2}$ οπότε: $\lambda = 2\frac{d}{6}$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε λ = 33 mm

Η συχνότητα των μικροκυμάτων θα είναι $f = \frac{c}{\lambda}$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε: f = 9,1 GHz