Β΄ Λυκείου

7 Μαρτίου 2015

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε χαρτί Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί (το οποίο θα παραδώσετε στο τέλος της εξέτασης). Εκεί θα σχεδιάσετε και όσα γραφήματα ζητούνται στο **Θεωρητικό Μέρος**.
2. Τα γραφήματα του **Πειραματικού Μέρους** θα τα σχεδιάσετε *κατά προτεραιότητα* στο μιλιμετρέ χαρτί που συνοδεύει τις εκφωνήσεις.
3. Οι απαντήσεις στα υπόλοιπα ερωτήματα τόσο του **Θεωρητικού Μέρους** όσο και του **Πειραματικού** θα πρέπει *οπωσδήποτε* να συμπληρωθούν στο *“Φύλλο Απαντήσεων”* που θα σας δοθεί μαζί με τις εκφωνήσεις των θεμάτων.

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1^o

Α. Σημειακό φορτίο q τοποθετείται σε σημείο Α μη ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου και αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Ποιες προϋποθέσεις πρέπει να ικανοποιούνται ώστε η κίνηση του φορτίου να μη συμπίπτει με τη δυναμική γραμή που διέρχεται από το Α;

Β.Σε όλα τα σημεία μιας περιοχής Α του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, το δυναμικο έχει σταθερή, μη μηδενική τιμή. Στην περιοχή Α η ένταση Ε του πεδίου:

α) μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο,
β) είναι σταθερή, μη μηδενική σε όλα τα σημεία του χώρου,
γ) είναι μηδέν σε όλα τα σημεία του χώρου.

i) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.
ii) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ. Φορτισμένο σωματίδιο βάλλεται με ταχύτητα $υ_o$ σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, έτσι ώστε το διάνυσμα της ταχύτητάς του να σχηματίζει γωνία θ με το διάνυσμα της έντασης του πεδίου. Οι δυνατές τιμές της θ είναι 0^o, 45^o, 90^o και 180^o. Σε ποια περίπτωση η δύναμη που δέχεται είναι μεγαλύτερη:

i) 0^o, **ii)** 90^o, **iii)** 0^o και 180^o, **iv)** 45^o,
v) είναι πάντα η ίδια, **vi)** δε μπορούμε να αποφανθούμε χωρίς πρόσθετα δεδομένα.

Θέμα 2^o

Ένα σώμα μάζας m=25kg τοποθετείται στη θέση x=0 οριζόντιας επιφάνειας μήκους 20m, η οποία έχει όριο θραύσης $F_{θρ}$=150N, σε τόπο όπου g=10m/s^2. Στο σώμα ασκείται δύναμη F το μέτρο της οποίας δίνεται από τη σχέση $F=2x^2-40x+350$ (S.I.) ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει γωνία θ=30^o με την επιφάνεια (πάνω από την γραμμή του ορίζοντα).

Α. Να ελέγξετε αν το σώμα μπορεί να διανύσει όλο το μήκος της επιφάνειας με ασφάλεια. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Β. Αν απαντήσετε αρνητικά στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε **i)** τα όρια ασφαλούς κίνησης του σώματος και **ii)** την τιμή της γωνίας θ, για την οποία το σώμα μπορεί να διανύσει την επιφάνεια, χωρίς να προκληθεί θραύση της τελευταίας.

Θέμα 3^o

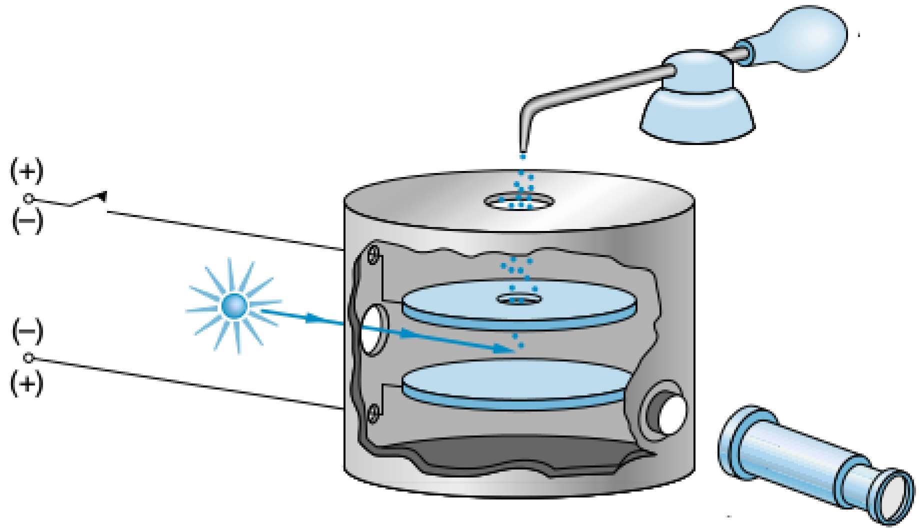
Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου εκτελεί κυκλική μεταβολή που αποτελείται από τις εξής επιμέρους μεταβολές:

i) Εκτόνωση από την κατάσταση Α με όγκο V_A και πίεση P_A στην κατάσταση Β με όγκο $V_B> V_A$, κατά την οποία η πίεση του αερίου μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση: P = βV,

όπου $\beta > 0$.
ii) Ισόχωρη ψύξη από την κατάσταση Β στην κατάσταση Γ υπό σταθερό όγκο V_B, κατά την οποία η πίεση του αερίου μειώνεται στην κατάσταση Γ σε P_A.
iii) Ισοβαρή συμπίεση από την κατάσταση Γ με όγκο V_B στην κατάσταση Α με όγκο V_A.
α) Υπολογίστε την πίεση, τον όγκο και την απόλυτη θερμοκρασία των καταστάσεων Α, Β και Γ σε συνάρτηση με τις ποσότητες β, V_A, V_B και T_A.
β) Σχεδιάστε σε διαγράμματα P-V, V-T, και P-T την κυκλική μεταβολή του αερίου Α→Β→Γ→Α, εξηγώντας τη μορφή της κάθε επιμέρους μεταβολής στο αντίστοιχο διάγραμμα.
γ) Υπολογίστε το συντελεστή απόδοσης του κύκλου που εκτελεί το ιδανικό αέριο και αποδείξτε ότι είναι ίδιος για όλους τους κύκλους αυτής της μορφής που εκτελούνται ανάμεσα στα ίδια όρια όγκων V_A και V_B, ανεξάρτητα από την τιμή του β (για β θετικό).

Πειραματικό Μέρος

Από το 1909 έως το 1913 ο R. Millikan πραγματοποίησε μια σειρά πειραμάτων μέσω των οποίων απέδειξε ότι το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι κβαντισμένο, και επιπλέον κατάφερε να προσδιορίσει την τιμή του. Μια, νεώτερη, εκδοχή της συσκευής που χρησιμοποίησε, που διατηρεί μόνο τα βασικά τμήματα, φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Ο Millikan χρησιμοποίησε ένα θάλαμο, εντός του οποίου δημιουργούσε και καταργούσε ένα ηλεκτρικό πεδίο με τη βοήθεια μιας μπαταρίας και ενός διακόπτη αντιστοίχως. Από μια οπή εισήγαγε στο θάλαμο φορτισμένα σταγονίδια λαδιού, ή κάποια άλλης ουσίας, την κίνηση των οποίων μπορούσε να παρακολουθεί με τη βοήθεια ενός τηλεσκοπίου. Η ποσότητα του φορτίου που έφερε κάθε σταγόνα ήταν τυχαία και προέκυπτε από την τριβή της με τον ψεκαστή ή από άλλες αιτίες. Καθώς οι σταγόνες κινούνταν προς τα κάτω, χωρίς την παρουσία ηλεκτρικού πεδίου, αποκτούσαν κάποια στιγμή σταθερή ταχύτητα. Πριν φθάσουν στην κάτω πλάκα, ο Millikan δημιουργούσε ηλεκτρικό πεδίο έντασης Ε με αποτέλεσμα εκείνες οι σταγόνες που είχαν το κατάλληλο φορτίο να αντιστρέψουν τη φορά κίνησης τους και να ξεκινήσουν να ανεβαίνουν, αποκτώντας και πάλι, κάποια στιγμή, σταθερή ταχύτητα. Ο Millikan μετρούσε τους χρόνους που χρειαζόταν κάθε σταγόνα που παρατηρούσε προκειμένου να διανύσει μια ορισμένη απόσταση (L) κατεβαίνοντας $t_{καθ}$

(χωρίς την παρουσία του πεδίου) και ανεβαίνοντας $t_{ανοδ}$ (παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου) με σταθερή ταχύτητα.

Δ1. Θεωρώντας ότι η αντίσταση του αέρα δίνεται από τον νόμο $F = 6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r \cdot \upsilon$ (νόμος του Stokes), όπου μ ο συντελεστής ιξώδους του αέρα, r η ακτίνα και υ η ταχύτητα της σταγόνας, εξηγήστε γιατί η σταγόνα κατά την κάθοδό και την άνοδό της αποκτούσε, κάποια στιγμή, σταθερή ταχύτητα.

Δ2. Να δείξετε ότι το φορτίο της κάθε σταγόνας δίνεται από την εξίσωση:

$$q = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_\lambda \cdot g}{3E} \cdot \left(\frac{1}{t_{\alpha\nu}} + \frac{1}{t_{\kappa\alpha\theta}} \right) \cdot t_{\kappa\alpha\theta}$$

όπου ρλ είναι η πυκνότητα πυκνότητα του λαδιού, θεωρώντας ότι η ανοδική και καθοδική κίνηση της σταγόνας γίνεται αποκλειστικά και μόνο με σταθερή ταχύτητα.

Δ3. Ποια επιπλέον δύναμη θα έπρεπε να λάβετε υπόψη σας για να αυξήσετε την ακρίβεια στον προηγούμενο υπολογισμό;

Δ4. Ο Millikan έχοντας στη διάθεσή του τον συντελεστή ιξώδους του αέρα, την πυκνότητα του λαδιού, την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, μετρώντας τους χρόνους καθόδου και ανόδου, και υπολογίζοντας την ακτίνα της σταγόνας, μπορούσε να υπολογίσει, από την εξίσωση που αποδείξατε στο ερώτημα **Δ2**, το φορτίο κάθε σταγόνας. Σε μια σειρά τέτοιων παρατηρήσεων ο Millikan μέτρησε τα ακόλουθα φορτία (σε Coulomb) για τις σταγόνες που κινούνταν μέσα στη διάταξή του:

$8{,}20 \cdot 10^{-19}$, $11{,}49 \cdot 10^{-19}$, $13{,}13 \cdot 10^{-19}$, $9{,}87 \cdot 10^{-19}$, $6{,}55 \cdot 10^{-19}$

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα, υπολογίζοντας τις διαφορές μεταξύ των φορτίων των σταγονών.

	$8{,}20 \cdot 10^{-19}$	$11{,}49 \cdot 10^{-19}$	$13{,}13 \cdot 10^{-19}$	$9{,}87 \cdot 10^{-19}$	$6{,}55 \cdot 10^{-19}$
$8{,}20 \cdot 10^{-19}$					
$11{,}49 \cdot 10^{-19}$					
$13{,}13 \cdot 10^{-19}$					
$9{,}87 \cdot 10^{-19}$					
$6{,}55 \cdot 10^{-19}$					

Δ5. Υπολογίστε τη μέση τιμή της ελάχιστης (μη μηδενικής) διαφοράς q_{min} με βάση τον πίνακα στο ερώτημα **Δ4**.

Δ6. Ελέγξτε αν όλα τα φορτία του ερωτήματος **Δ4** είναι ακέραια πολλαπλάσια αυτής της ελάχιστης τιμής, υπολογίζοντας τους αντίστοιχους ακεραίους αριθμούς n και συμπληρώνοντας τον ακόλουθο πίνακα.

Φορτίο σταγόνας (q σε C)	n
$8{,}20 \cdot 10^{-19}$	
$11{,}49 \cdot 10^{-19}$	
$13{,}13 \cdot 10^{-19}$	
$9{,}87 \cdot 10^{-19}$	
$6{,}55 \cdot 10^{-19}$	

Καλή Επιτυχία

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε κάποιο γράφημα σ' αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες, τιτλοδοτήστε και συμπεριλάβετε τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα.

Β΄ Λυκείου
ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Θεωρητικό Μέρος
Θέμα 1ο

Α. ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ: ....

....

Β. Σωστή είναι η πρόταση ....

ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ: ....

....

Γ. Σωστή είναι η πρόταση ....

Θέμα 2ο

Α. (Στο τετράδιό σας)

Β.

i) Όρια ασφαλούς κίνησης:...

ii) Για τη γωνία θ ισχύει:...

Θέμα 3ο

α).

	P	**V**	**T**
Α			
Β			
Γ			

β) Σχεδιάστε τα γραφήματα και δώστε τις απαραίτητες εξηγήσεις στο τετράδιό σας.

γ) e= ……………………..

Απόδειξη στο τετράδιό σας

Πειραματικό Μέρος

Δ1...

....

....

Δ2. Στο τετράδιό σας.

Δ3. ....

Δ4.

	$8{,}20\cdot10^{-19}$	$11{,}49\cdot10^{-19}$	$13{,}13\cdot10^{-19}$	$9{,}87\cdot10^{-19}$	$6{,}55\cdot10^{-19}$
$8{,}20\cdot10^{-19}$					
$11{,}49\cdot10^{-19}$					
$13{,}13\cdot10^{-19}$					
$9{,}87\cdot10^{-19}$					
$6{,}55\cdot10^{-19}$					

Δ5. q_{min}= ....

Δ6.

Φορτίο σταγόνας (q σε C)	n
$8{,}20\cdot10^{-19}$	
$11{,}49\cdot10^{-19}$	
$13{,}13\cdot10^{-19}$	
$9{,}87\cdot10^{-19}$	
$6{,}55\cdot10^{-19}$	

Συνοπτικές Απαντήσεις
Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο
Α. Αρκεί οι δυναμικές γραμμές του πεδίου να μην είναι ευθείες.

Β.
i) Σωστή είναι η πρόταση γ.
ii) Από τη σχέση Ε=ΔV/Δx προκύπτει ότι αφού δε μεταβάλλεται το δυναμικό, η ένταση μηδενίζεται σε όλα τα σημεία της περιοχής Α
Γ. Σωστή η v)

Θέμα 2ο
Α. $F_y=(2x^2-40x+350)ημ(30^o)=x^2-20x+175$
$N = w-F_y = -x^2+20x+75$
Πρέπει $N \le 150$ N => $-x^2+20x+75 \le 150$ N => $-x^2+20x-75 \le 0$
$x_1=5$m και $x_2=15$m
Εκτός του διαστήματος των ριζών το τριώνυμο είναι ομόσημο του α=-1, δηλ. το σώμα κινείται με ασφάλεια μέχρι τα 5m **(αν τηλεμεταφερθεί μπορεί επίσης να κινηθεί και μετά τα 15m!).**
Β.
i) [0 , 5] (**τυπικά και [15 , 20]**)
ii) $F_y=(2x^2-40x+350)ημθ$
$N = w-F_y = 250-(2x^2-40x+350)ημθ$
Πρέπει $N \le 150$ N $\Rightarrow 250-(2x^2-40x+350)ημθ \le 150$ N $\Rightarrow 100-(2x^2-40x+350)ημθ \le 0 \Rightarrow$
$-2ημθx^2+40ημθx+100-350ημθ \le 0$
Πρέπει το τριώνυμο να είναι ομόσημο του αρνητικού α(=-2ημθ με θ οξεία) για κάθε x, δηλ. πρέπει $Δ<0 \Rightarrow 1600ημ^2θ+4\cdot 2ημθ(100-350ημθ)<0 \Rightarrow -1200ημ^2θ+800ημθ<0 \Rightarrow$

$$-3ημ^2θ+2ημθ < 0 \quad (1)$$

Οι ρίζες της $-3ημ^2θ+2ημθ=0$ είναιημθ=0 και ημθ=2/3. Το τριώνυμο αυτό είναι ομόσημο του α = -3 εκτός των ριζών, δηλ. ημθ>2/3 ή ημθ<0.
Η δεύτερη απορρίπτεται γιατί δίνει $θ<0^o$ ή $θ>180^o$, δηλ. είτε F_y αρνητική ή F_x αρνητική. Συναληθεύοντας την πρώτη με την απαίτηση η θ να είναι οξεία καταλήγουμε:

$$\begin{cases} ημθ > 2/3 \\ ημθ < 1 \end{cases}$$

(Δηλ.περίπου $41,81^o<θ<90^o$)

Θέμα 3ο

	P	V	T
Α	$βV_A$	V_A	T_A
Β	$βV_B$	V_B	$T_A\dfrac{V_B^2}{V_A^2}$
Γ	$βV_A$	V_B	$T_A\dfrac{V_B}{V_A}$

α) Στην κατάσταση Α: $P_A= βV_A$.
Στην Β: $P_B = βV_B$, ενώ για τη θερμοκρασία: $P_BV_B = nRT_B \Rightarrow T_B = \dfrac{βV_BV_B}{nR} = \dfrac{βV_BV_B}{\frac{P_AV_A}{T_A}} = T_A\dfrac{βV_BV_B}{βV_AV_A} = T_A\dfrac{V_B^2}{V_A^2}$.

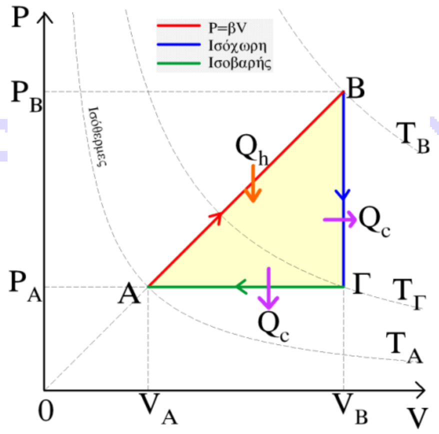
Στην Γ: $P_Γ = P_A$, $V_Γ = V_B$ ενώ για τη θερμοκρασία, επειδή η Γ→Α είναι ισοβαρής: $\dfrac{V_Γ}{T_Γ} = \dfrac{V_A}{T_A} \Rightarrow \dfrac{T_Γ}{V_B} = \dfrac{T_A}{V_A} \Rightarrow$

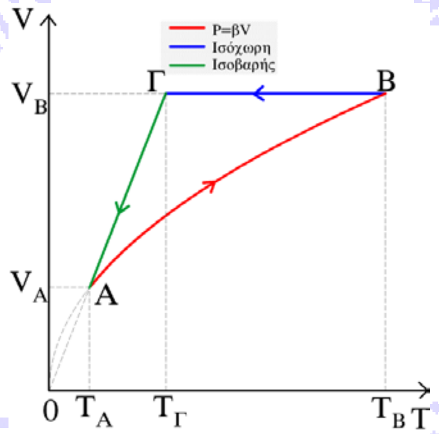
$T_\Gamma = T_A \dfrac{V_B}{V_A}$.

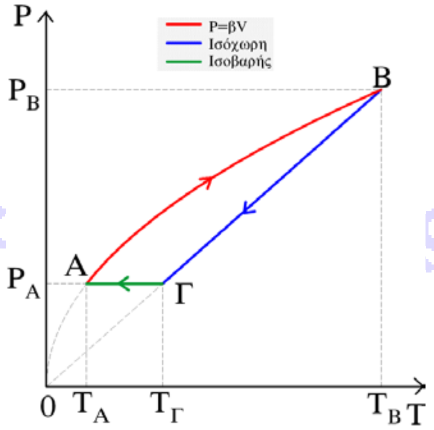
Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον παραπάνω πίνακα.

β) Η μεταβολή Α→Β στο διάγραμμα *P-V* είναι ευθύγραμμο τμήμα που η προέκτασή του διέρχεται από την αρχή των αξόνων (για $V = 0 \Rightarrow P = 0$) και βρίσκεται μεταξύ των ορίων όγκου V_A και V_B.

Στο διάγραμμα *V-T*, έχουμε για τη μεταβολή Α→Β ότι: $PV = nRT \Rightarrow \beta VV = nRT \Rightarrow \beta V^2 = nRT \Rightarrow T = \dfrac{\beta}{nR}V^2$. Από την τελευταία προκύπτει ότι αν θεωρήσουμε $y=T$ και $x=V$, τότε η μορφή της καμπύλης είναι παραβολή της μορφής $y = \alpha x^2$, με $\alpha > 0$. Επομένως η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τον άξονα *T*, ενώ προεκτεινόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων *V-T*. Τα όρια της καμπύλης φαίνονται στον πίνακα. Η μεταβολή Β→Γ είναι ισόχωρη, οπότε είναι κάθετη στον άξονα *V*. Τερματίζεται στο σημείο Γ.







Η μεταβολή Γ→Α είναι ισοβαρής οπότε είναι ευθύγραμμο τμήμα που προεκτεινόμενο διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Το σημείο Α είναι το σημείο τομής αυτού του ευθύγραμμου τμήματος με την παραβολή Α→Β, ενώ το Γ το σημείο τομής με την παράλληλη στον άξονα *T*.

Στο διάγραμμα *P-T*, έχουμε για τη μεταβολή Α→Β ότι: $PV = nRT \Rightarrow P\dfrac{P}{\beta} = nRT \Rightarrow P^2 = \beta nRT \Rightarrow T = \dfrac{1}{\beta nR}P^2$. Από την τελευταία προκύπτει ότι αν θεωρήσουμε $y=T$ και $x=P$, τότε η μορφή της καμπύλης είναι παραβολή της μορφής $y = \alpha' x^2$, με $\alpha' > 0$. Επομένως η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τον άξονα *T*, ενώ προεκτεινόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων *P-T*. Τα όρια της καμπύλης φαίνονται στον πίνακα. Η μεταβολή Β→Γ είναι ισόχωρη οπότε είναι ευθύγραμμο τμήμα που προεκτεινόμενο διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Το σημείο Β είναι το σημείο τομής αυτού του ευθύγραμμου τμήματος με την παραβολή Α→Β. Η μεταβολή Γ→Α είναι ισοβαρής, οπότε είναι κάθετη στον άξονα *P*. Τερματίζεται στο σημείο Γ, που είναι το σημείο τομής με την παραβολή Α→Β.

γ) Το παραγόμενο έργο κατά τον κύκλο είναι ίσο με το περικλειόμενο εμβαδό που είναι το τρίγωνο ΑΒΓ στο διάγραμμα *P-V*. Επομένως:

$$W = \frac{(P_B - P_A)(V_B - V_A)}{2} = \frac{(\beta V_B - \beta V_A)(V_B - V_A)}{2} = \frac{\beta (V_B - V_A)^2}{2} \quad (1).$$

Η μεταβολή Α$\rightarrow$Β παράγει θετικό έργο ως εκτόνωση (W_{AB}>0). Επίσης προκαλεί αύξηση τηςθερμοκρασίας, γιατί από την καταστατική: $T = \frac{PV}{nR} = \frac{\beta V^2}{nR}$ και αφού έχουμε εκτόνωση, ο όγκος αυξάνεται και συνεπώς και η απόλυτη θερμοκρασία. Επομένως και η εσωτερική ενέργεια αυξάνεται, δηλαδή ΔU_{AB}>0. Επομένως $Q_{AB}=W_{AB}+\Delta U_{AB}$>0. Στην Β$\rightarrow$Γ το έργο είναι μηδέν ως ισόχωρη, ενώ η θερμοκρασία μειώνεται. Άρα $Q_{B\Gamma}$<0. Στην Γ$\rightarrow$Α το έργο είναι αρνητικό ως συμπίεση, ενώ η θερμοκρασία μειώνεται. Άρα $Q_{\Gamma A}$<0. Επομένως $Q_h=Q_{AB}$. Για τον υπολογισμό του Q_h, υπολογίζουμε το έργο W_{AB} που από το διάγραμμα *P-V* προκύπτει ότι είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδό τραπεζίου:

$$W_{AB} = \frac{(P_B + P_A)(V_B - V_A)}{2} = \frac{(\beta V_B + \beta V_A)(V_B - V_A)}{2} = \frac{\beta (V_B + V_A)(V_B - V_A)}{2} = \frac{1}{2}\beta (V_B^2 - V_A^2) \quad (2).$$

Η αντίστοιχη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι:

$$\Delta U_{AB} = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = \frac{3}{2}(P_B V_B - P_A V_A) = \frac{3}{2}(\beta V_B V_B - \beta V_A V_A) = \frac{3}{2}\beta (V_B^2 - V_A^2) \quad (3).$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι:$Q_h = \frac{4}{2}\beta (V_B^2 - V_A^2) = 2\beta (V_B^2 - V_A^2)$ (4).

Από τις (1) και (4) έχουμε τέλος για το συντελεστή απόδοσης ότι: $e = \frac{W}{Q_h} = \frac{\frac{\beta (V_B - V_A)^2}{2}}{2\beta (V_B^2 - V_A^2)} =$

$\frac{\beta (V_B - V_A)^2}{4\beta (V_B^2 - V_A^2)} = \frac{(V_B - V_A)^2}{4(V_B^2 - V_A^2)}$, ποσότητα που εξαρτάται μόνο από τα όρια του κύκλου και όχι από την κλίση *β* της μεταβολής Α$\rightarrow$Β.

Πειραματικό Μέρος

Δ1. Αφού η αντίσταση του αέρα αυξάνει με την ταχύτητα, ενώ οι άλλες δυνάμεις, βάρος και ηλεκτρική δύναμη είναι σταθερές, κάποια στιγμή θα έχω $\sum F$ =0, οπότε η σταγόνα θα κάνει ομαλή κίνηση.

Δ2. ΚΑΘΟΔΟΣ: $\sum F = 0 \Rightarrow mg = F \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\lambda g = 6\pi \mu r \upsilon_{\kappa\alpha\theta}$ (1)

ΑΝΟΔΟΣ: $\sum F = 0 \Rightarrow mg + F = F_{\eta\lambda} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\lambda g + 6\pi \mu r \upsilon_{\alpha\nu} = Eq \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6\pi\mu r\upsilon_{\alpha\nu} = Eq - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_\lambda g \ (2)$$

Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{6\pi\mu r\upsilon_{\alpha\nu}}{6\pi\mu r\upsilon_{\kappa\alpha\theta}} = \frac{Eq - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_\lambda g}{\frac{4}{3}\pi r^3\rho_\lambda g} \Rightarrow q = \frac{4\pi r^3\rho_\lambda g}{3E}\frac{\upsilon_{\alpha\nu}+\upsilon_{\kappa\alpha\theta}}{\upsilon_{\kappa\alpha\theta}} \Rightarrow (3)$$

$$\Rightarrow q = \frac{4\pi r^3\rho_\lambda g}{3E}\frac{\frac{L}{t_{\alpha\nu}}+\frac{L}{t_{\kappa\alpha\theta}}}{\frac{L}{t_{\kappa\alpha\theta}}} \Rightarrow q = \frac{4\pi r^3\rho_\lambda g}{3E}\left(\frac{1}{t_{\alpha\nu}}+\frac{1}{t_{\kappa\alpha\theta}}\right)t_{\kappa\alpha\theta}$$

ΣΗΜ: Ο Millikan υπολόγιζε την ακτίνα της σταγόνας από τη σχέση (1) ως εξής:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_\lambda g = 6\pi\mu r\upsilon_{\kappa\alpha\theta} \Rightarrow \frac{2}{3}r^2\rho_\lambda g = 3\mu\upsilon_{\kappa\alpha\theta} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\mu\upsilon_{\kappa\alpha\theta}}{2\rho_\lambda g}}$$

που αν την αντικαταστήσουμε στην (3) έχουμε:

$$q = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{9\mu}{2}\right)^{3/2}\frac{\rho_\lambda g\upsilon_{\kappa\alpha\theta}^{3/2}}{\rho_\lambda^{3/2}g^{3/2}E}\frac{\upsilon_{\alpha\nu}+\upsilon_{\kappa\alpha\theta}}{\upsilon_{\kappa\alpha\theta}} \Rightarrow q = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{9\mu}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{\rho_\lambda g}\right)^{1/2}\frac{(\upsilon_{\alpha\nu}+\upsilon_{\kappa\alpha\theta})\upsilon_{\kappa\alpha\theta}^{1/2}}{E}.$$

Δ3. Άνωση από τον αέρα.

Δ4. Ο πίνακας συμπληρωμένος

	8,20	11,5	13,1	9,87	6,55
8,20	0,00	3,29	4,93	1,67	1,65
11,49	3,29	0,00	1,64	1,62	4,94
13,13	4,93	1,64	0,00	3,26	6,58
9,87	1,67	1,62	3,26	0,00	3,32
6,55	1,65	4,94	6,58	3,32	0,00

Δ5. Βρίσκουμε τη μέση τιμή των κόκκινων τιμών (ελάχιστες τιμές) που δίνει $1{,}65\cdot10^{-19}$. Στη συνέχεια έχουμε τον πίνακα:

Φορτίοσταγόνας (q σε C)	**n**
$8{,}20 \cdot 10^{-19}$	$4{,}97 \approx 5$
$11{,}49 \cdot 10^{-19}$	$6{,}964 \approx 7$
$13{,}13 \cdot 10^{-19}$	$7{,}958 \approx 8$
$9{,}87 \cdot 10^{-19}$	$5{,}982 \approx 6$
$6{,}55 \cdot 10^{-19}$	$3{,}97 \approx 4$