ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2023 - Γ΄ Τάξη

22/4/2023

ΟΔΗΓΙΕΣ

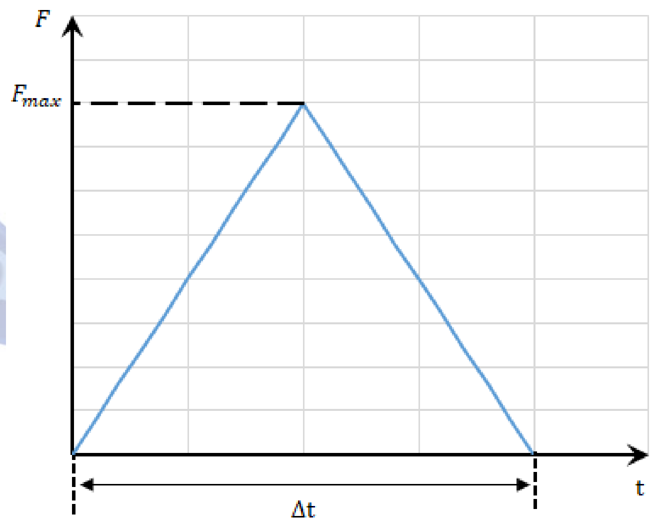
1. Οι απαντήσεις σε *όλα* τα ερωτήματα θα πρέπει να αναγραφούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που ακολουθεί μετά το τέλος των εκφωνήσεων.
2. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε φύλλα Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί. Τα υλικά αυτά θα παραδοθούν στο τέλος της εξέτασης μαζί με το ***Φύλλο Απαντήσεων***

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

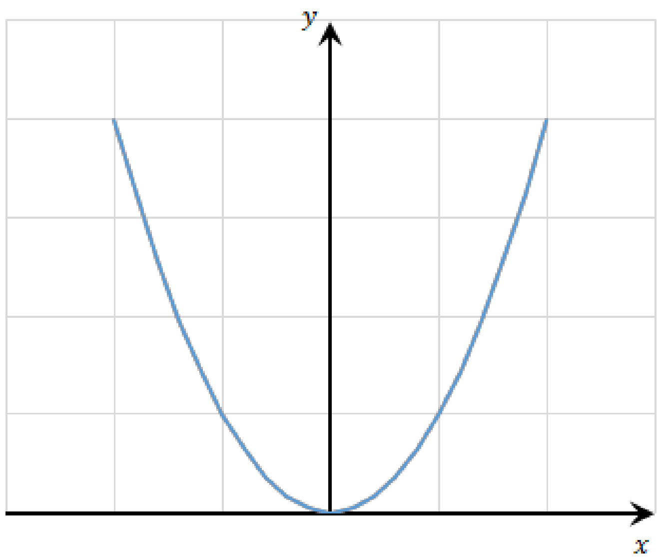
1ο ΘΕΜΑ

Α.1. Ένα μπαλάκι που έχει μάζα $200g$ και κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $3{,}5m/s$, χτυπά σε κατακόρυφο τοίχο. Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι $12ms$ και εξαιτίας της το μπαλάκι αποκτά οριζόντια ταχύτητα μέτρου $3\ m/s$.

Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης δύναμης F_{max} που ασκήθηκε στο μπαλάκι από τον κατακόρυφο τοίχο υποθέτοντας ότι η εξάρτηση της δύναμης επαφής από το χρόνο περιγράφεται από την διπλανή γραφική παράσταση.

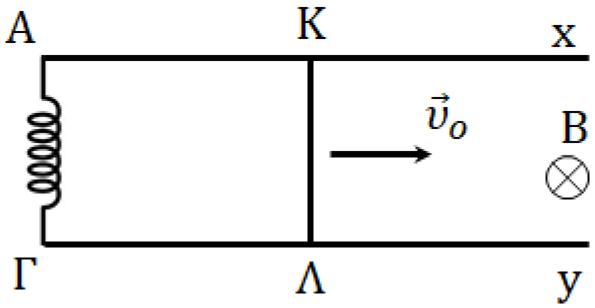


Α.2. Ένα σύρμα λυγίζεται ώστε να αποκτήσει παραβολικό σχήμα, που περιγράφεται από την συνάρτηση $y = Ax^2$ (βλ. σχήμα) και τοποθετείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου B, με το επίπεδό του κάθετο στις δυναμικές γραμμές. Την στιγμή $t = 0$, ευθύγραμμος και οριζόντιος αγωγός, απείρου μήκους, που εφάπτεται στο ακρότατο της παραβολής, τίθεται σε μεταφορική κίνηση κατά μήκος του άξονα $y'y$ με σταθερή επιτάχυνση α, θετικής φοράς. Να υπολογίσετε την επαγόμενη ΗΕΔ $E_{\varepsilon\pi}$ που αναπτύσσεται μεταξύ των σημείων τομής των δύο αγωγών.



2ο ΘΕΜΑ

Θεωρούμε δύο παράλληλες μεταλλικές ράβδους Ax, Γy αμελητέας αντίστασης, στα άκρα A, Γ των οποίων συνδέουμε ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 0{,}2H$. Η απόσταση



των ράβδων είναι $l = 0{,}4m$. Αγώγιμη ράβδος $ΚΛ$ μήκους $l = 0{,}4m$ και μάζας $m = 0{,}2kg$, αμελητέας αντίστασης μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στις ράβδους Ax, $Γy$. Το επίπεδο της διάταξης είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης μέτρου $B = 0{,}5T$ και με κατεύθυνση όπως στο σχήμα. Κάποια στιγμή που θεωρούμε αρχή μέτρησης του χρόνου, εκτοξεύουμε τη ράβδο $ΚΛ$ με ταχύτητα $\upsilon_o = 2m/s$.

Β.1. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_1 που η ταχύτητα της ράβδου μηδενίζεται.

Β.2. Να βρείτε την μετατόπιση, σε σχέση με την θέση εκτόξευσης, $Δx$ της ράβδου την ίδια στιγμή.

Β.3. Πόση είναι η ενέργεια U_B στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου τότε;

3ο ΘΕΜΑ

Σώμα Σ αφήνεται σε απόσταση R από το κέντρο ομογενούς πλανήτη Π. Μόλις το σώμα αφεθεί και πριν προλάβει να χάσει ύψος, σημειώνεται έκρηξη στο εσωτερικό του, που το διασπά σε δύο κομμάτια, έστω 1 και 2. Αμέσως μετά την έκρηξη, το κομμάτι 1 γίνεται δορυφόρος του πλανήτη σε απόσταση R, ενώ το κομμάτι 2 απομακρύνεται και φτάνει με μηδενική ταχύτητα σε άπειρη απόσταση από αυτόν.

Γ.1. Να υπολογίσετε τον λόγο των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ των κομματιών 1 και 2, υποθέτοντας ότι μόνο ο πλανήτης Π επιδρά στην κίνηση του κομματιού 2.

Γ.2. Όμοιο σώμα Σ΄ αφήνεται πάλι στην ίδια απόσταση R από το κέντρο του ίδιου ομογενούς πλανήτη Π. Μόλις το σώμα αφεθεί, έκρηξη το διασπά σε δύο κομμάτια 1΄ και 2΄. Αμέσως μετά την έκρηξη, το κομμάτι 1΄ γίνεται δορυφόρος του πλανήτη Π σε απόσταση $R_1 = 2R$, ενώ το κομμάτι 2΄ γίνεται δορυφόρος του πλανήτη σε απόσταση $R_2 = \frac{3R}{2}$. Να υπολογίσετε το λόγο μαζών $\frac{m'_1}{m'_2}$ των κομματιών 1΄ και 2΄, υποθέτοντας ξανά ότι μόνο ο πλανήτης Π επιδρά στις κινήσεις των κομματιών.

Γ.3. Αν E_A είναι η ενέργεια που προσδίδει η έκρηξη στα κομμάτια του Σ και E_B η ενέργεια που προσδίδει η έκρηξη στα κομμάτια του Σ΄, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{E_A}{E_B}$.

Να θεωρήσετε αμελητέα την βαρυτική έλξη μεταξύ των κομματιών που προκύπτουν από την διάσπαση. Κανένα από τα αναφερόμενα μεγέθη δεν είναι αριθμητικά γνωστό.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΡΟΥΣΕΙΣ-ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \qquad v_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2$$

$$v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$$
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$
$$T_{ολ} = \mu N$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$p = mv$$
$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a_κ = \frac{v^2}{r}$$
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$
$$v_{cm} = \omega R$$
$$\alpha_{γων} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_{cm} = a_{γων}R$$
$$\tau = F\ell = Fd$$
$$L = mvr$$
$$\Sigma\tau_{εξ} = \frac{dL}{dt}$$

a : Επιτάχυνση	K : Κινητική ενέργεια	s : Τόξο ή Διάστημα	$\alpha_{γων}$: Γωνιακή επιτάχυνση
E : Ενέργεια	L : Στροφορμή	T : Περίοδος	μ : Συντελεστής τριβής
f : Συχνότητα	ℓ, d : Μήκος ή Απόσταση	V : Όγκος	θ : Γωνία
F : Δύναμη	m : Μάζα	v : Ταχύτητα	ρ : Πυκνότητα
$T_{ολ}$: Τριβή ολίσθησης	p : Ορμή	W : Έργο	τ : Ροπή
N : Κάθετη δύναμη	R, r : Ακτίνα	x, y : Θέση	ω : Γωνιακή ταχύτητα
		Δx : Μετατόπιση	

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

$$x = A\,ημ(\omega t + \phi)$$
$$v = \omega A\,συν(\omega t + \phi)$$
$$a = -\omega^2 A\,ημ(\omega t + \phi)$$
$$a = -\omega^2 x$$
$$F = -Dx$$
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$D = m\omega^2$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$
$$U = \frac{1}{2}Dx^2$$
$$F = -bv$$
$$A = A_0 e^{-\Lambda t}$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \ldots = σταθ.$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$v = \lambda f$$
$$y = A\,ημ\,2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$r_1 - r_2 = N\lambda,\ N \in \mathbb{Z}$$
$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2},\ N \in \mathbb{Z}$$
$$y = 2A\,συν\frac{2\pi x}{\lambda}\,ημ\frac{2\pi t}{T}$$
$$x_K = 0, \frac{\lambda}{2}, \ldots, N\frac{\lambda}{2}$$
$$x_\Delta = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \ldots, (2N+1)\frac{\lambda}{4}$$

A : Πλάτος	ω : Γωνιακή συχνότητα	K ή k : Σταθερά ελατηρίου	λ : Μήκος κύματος
x : Θέση	ϕ : Αρχική φάση	D : Σταθερά επαναφοράς	U : Δυναμική ενέργεια
v : Ταχύτητα	f : Συχνότητα	T : Περίοδος	y : Απομάκρυνση
a : Επιτάχυνση	f_0 : Ιδιοσυχνότητα	b : Σταθερά απόσβεσης	

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ - ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ

$$E = \frac{F}{q}$$
$$I = \frac{dq}{dt}$$
$$I = \frac{V}{R}$$
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{ολ}}$$
$$V = \frac{W}{q}$$
$$R_{ολ} = R_1 + R_2 + R_3$$
$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$
$$R = \rho\frac{\ell}{A}$$
$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\ell}{r^2}\,ημ\,\theta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$$
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi I}{r}$$
$$\sum B\Delta\ell\,συν\,\theta = \mu_0 I_{εγκ}$$
$$B = \mu_0 I n$$
$$n = \frac{N}{\ell}$$
$$\Phi_B = BA\,συν\,\theta$$
$$F = B|q|v\,ημ\,\phi$$
$$R = \frac{mv}{|q|B}$$
$$T = \frac{2\pi m}{|q|B}$$
$$v = \frac{E}{B}$$

$$F = BI\ell\,ημ\,\phi$$
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a}\ell$$
$$\mathcal{E}_{επ} = Bv\ell$$
$$\mathcal{E}_{επ} = \frac{1}{2}B\omega\ell^2$$
$$\mathcal{E}_{επ} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$
$$\mathcal{E}_{αυτ} = -L\frac{di}{dt}$$
$$L = \mu\mu_0\frac{N^2}{\ell}A$$
$$U = \frac{1}{2}LI^2$$
$$\frac{E}{B} = c$$

$$E = E_{max}\,ημ\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$B = B_{max}\,ημ\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$v = V\,ημ\,\omega t$$
$$V = NB\omega A$$
$$i = I\,ημ\,\omega t$$
$$i = \frac{v}{R}$$
$$I_{εν} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$
$$V_{εν} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$
$$p = vi$$
$$P = \frac{W}{T}$$

A : Εμβαδόν
B : Μαγνητικό πεδίο
E : Ηλεκτρικό πεδίο, ΗΕΔ
$\mathcal{E}$: ΗΕΔ
$\mathcal{E}_{\text{επ.}}$: ΗΕΔ από επαγωγή
$\mathcal{E}_{\text{αυτ.}}$: ΗΕΔ από αυτεπαγωγή
L : Συντελεστής αυτεπαγωγής
I : Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος

V : Διαφορά δυναμικού
ℓ, d, a : Μήκος ή Απόσταση
U : Ενέργεια Μαγνητικού πεδίου
q : Ηλεκτρικό φορτίο
R : Αντίσταση
W : Έργο
$R_{\text{ολ}}$: Ολική αντίσταση
ρ : Ειδική αντίσταση
F : Δύναμη
T : Περίοδος

q : Ηλεκτρικό φορτίο
r : Ακτίνα ή Απόσταση
n : Αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους
N : Αριθμός σπειρών
v : Ταχύτητα
Φ_B : Μαγνητική ροή
ϕ, θ : γωνία
μ : Μαγνητική διαπερατότητα
c : Ταχύτητα του φωτός

v : Στιγμιαία τάση
V : Πλάτος τάσης
i : Στιγμιαία ένταση
I : Πλάτος έντασης
$I_{\text{εν}}$: Ενεργός ένταση
$V_{\text{εν}}$: Ενεργός τάση
P : Μέση ισχύς
p : Στιγμιαία ισχύς
R : Αντίσταση
W : Ενέργεια ηλ. ρεύματος
Q : Θερμότητα

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

$$\lambda_{\max} T = \text{σταθερό}$$
$$c = \lambda f$$
$$E = hf = pc$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$
$$K = hf - \phi$$

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{mc}(1 - \text{συν}\,\varphi)$$
$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$
$$\sum |\Psi|^2 \, dV = 1$$

T : Θερμοκρασία
E : Ενέργεια
p : Ορμή

c : Ταχύτητα φωτός
f : Συχνότητα
x : Θέση

λ : Μήκος κύματος
φ : Γωνία
t : Χρόνος

ϕ : Έργο εξαγωγής
V : Όγκος
Ψ : Κυματοσυνάρτηση

Πολλαπλάσια - Υποπολλαπλάσια

10^{12}	→	Tera (T)	10^{3}	→	kilo (k)	10^{-6}	→	micro (μ)
10^{9}	→	Giga (G)	10^{-2}	→	centi (c)	10^{-9}	→	nano (n)
10^{6}	→	Mega (M)	10^{-3}	→	milli (m)	10^{-12}	→	pico (p)

Σταθερές

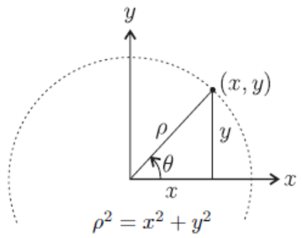
Μάζα Πρωτονίου
$$m_p = 1,67 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$
Μάζα Νετρονίου
$$m_n = 1,67 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$
Μάζα Ηλεκτρονίου
$$m_e = 9,11 \times 10^{-31}\ \text{kg}$$
Απόλυτη τιμή φορτίου ηλεκτρονίου
$$e = 1,6 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Ηλεκτρονιοβόλτ
$$1\ \text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\ \text{J}$$
Ταχύτητα του φωτός
$$c = 3 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$
Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης
$$g_0 = 9,8\ \text{m/s}^2$$
Ηλεκτρική Σταθερά
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^{9}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

Σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης
$$G = 6,67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$
Μαγνητική διαπερατότητα του κενού
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A}$$
Σταθερά του Planck
$$h = 6,63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$
$$h = 4,14 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$$
$$hc = 12,42 \times 10^{-7}\ \text{eV} \cdot \text{m}$$
$$hc = 1242\ \text{eV} \cdot \text{nm} \simeq 1200\ \text{eV} \cdot \text{nm}$$

Μαθηματικό Βοήθημα

$\theta\,(^\circ)$	ημ θ	συν θ	εφ θ
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$-$



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$
$$\text{ημ}\,\theta = \frac{y}{\rho}, \quad \text{συν}\,\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \text{εφ}\,\theta = \frac{y}{x}$$

Εμβαδόν Παραλληλογράμμου : $A = \beta v$
Περίμετρος Κύκλου : $C = 2\pi r$
Εμβαδόν Κύκλου : $A = \pi r^2$
Εμβαδόν Σφαίρας : $A = 4\pi r^2$
Όγκος Σφαίρας : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Μήκος τόξου κύκλου : $s = \theta r$
$$\text{ημ}\,A + \text{ημ}\,B = 2\,\text{συν}\frac{A-B}{2}\,\text{ημ}\frac{A+B}{2}$$

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Όνομα και Επώνυμο: ……………………………………………………………
Όνομα Πατέρα: …………………….. Όνομα Μητέρας: …………………..
Τηλ. Οικίας: ………………….. Κινητό τηλέφωνο: ……………………..….
e-mail: ……………………..………………………………………

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1ο ΘΕΜΑ

Α.1. $F_{max} =$.................................. , **Α.2.** $E_{επ} =$..................................

2ο ΘΕΜΑ

Β.1. $t_1 =$……………….. , **Β.2.** $Δx =$……………….. , **Β.3.** $U_B =$………………..

3ο ΘΕΜΑ

Γ.1. $\frac{m_1}{m_2} =$…………………… , **Γ.2.** $\frac{m'_1}{m'_2} =$…………………… , **Γ.3.** $\frac{E_A}{E_B} =$……………………

Καλή επιτυχία!

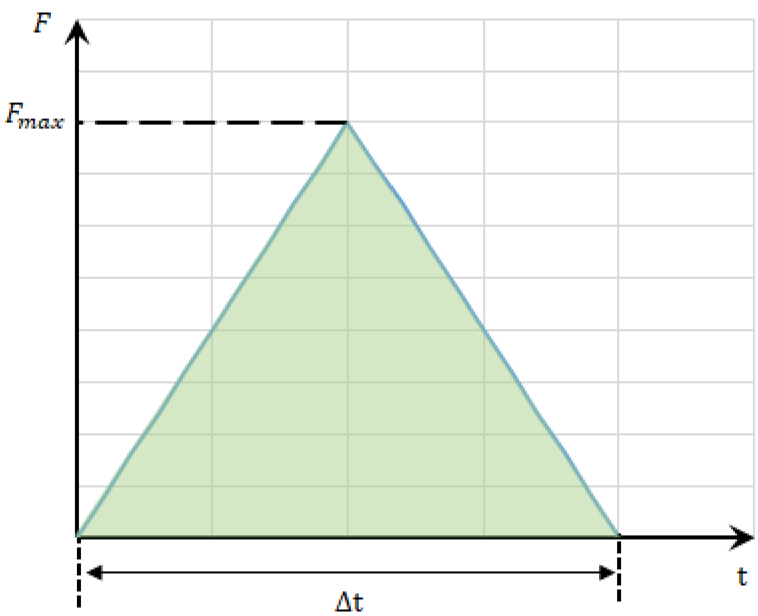
Συνοπτικές Απαντήσεις

1ο ΘΕΜΑ

Α.1. Από τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής στην γενικευμένη του μορφή έχουμε:

$$\Sigma F \cdot \Delta t = \Delta P$$

Επειδή η συνισταμένη δύναμη δεν έχει σταθερό μέτρο, μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο $\Sigma F \cdot \Delta t$ γραφικά, από το εμβαδό με την χρωματική επισήμανση του ακόλουθου σχήματος:



Άρα:

$$\Sigma F \cdot \Delta t = \frac{1}{2} F_{max} \Delta t$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

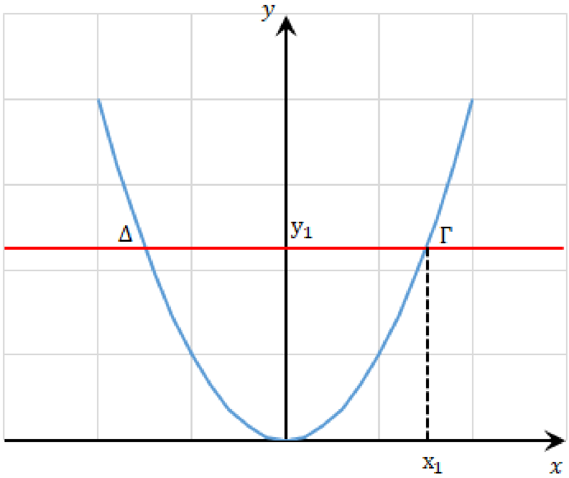
$$\frac{1}{2} F_{max} \Delta t = \Delta P \Rightarrow \frac{1}{2} F_{max} \Delta t = m(\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} + \upsilon_{\alpha\rho\chi}) \Rightarrow F_{max} = \frac{2m(\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} + \upsilon_{\alpha\rho\chi})}{\Delta t}$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$F_{max} = \frac{2 \cdot 0{,}2(3 + 3{,}5)}{12 \cdot 10^{-3}} N \Rightarrow F_{max} = \frac{13}{3} 10^2 N$$

Α.2. Έστω y_1 η θέση του ευθύγραμμου αγωγού την στιγμή t_1, δηλαδή ισχύει:

$$y_1 = \frac{1}{2}\alpha {t_1}^2$$



Συνδυάζοντας την σχέση αυτή με τον τύπο της παραβολικής συνάρτησης έχουμε:

$$A{x_1}^2 = \frac{1}{2}\alpha {t_1}^2$$

Η παραβολή $y = Ax^2$ έχει άξονα συμμετρίας; τον $y'y$. Συνεπώς, ονομάζοντας Γ και Δ τα σημεία τομής των δύο αγωγών, έχουμε:

$$(\Gamma\Delta) = 2x_1$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει:

$$(\Gamma\Delta) = 2\sqrt{\frac{\alpha {t_1}^2}{2A}} \Rightarrow (\Gamma\Delta) = \sqrt{\frac{2\alpha}{A}}t_1$$

Την στιγμή t_1 η ταχύτητα του ευθύγραμμου αγωγού είναι:

$$\upsilon_1 = \alpha t_1$$

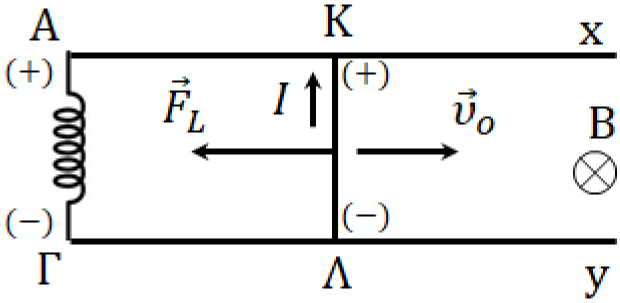
Καταλήγουμε λοιπόν στο αποτέλεσμα:

$$E_{\varepsilon\pi} = B \cdot l \cdot \upsilon \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = B \cdot \sqrt{\frac{2\alpha}{A}}t_1 \cdot \alpha t_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \sqrt{\frac{2\alpha}{A}} \cdot B \cdot \alpha {t_1}^2$$

2ο ΘΕΜΑ

Β.1. Στα άκρα της ράβδου αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ με στιγμιαία τιμή $E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon l$ με θετικό πόλο στο άκρο K και αρνητικό στο άκρο Λ. Το κύκλωμα $K A \Gamma \Lambda K$ αρχίζει να διαρρέεται από ρεύμα, οπότε στο πηνίο αναπτύσσεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή με



πολικότητα αντίθετη από αυτή της ράβδου $K\Lambda$.

Ισχύει ότι:

$$E_{\varepsilon\pi} - |E_{\alpha\upsilon\tau}| = 0 \Rightarrow |E_{\alpha\upsilon\tau}| = E_{\varepsilon\pi} \Rightarrow L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = B\upsilon l \Rightarrow L|\Delta I| = B \cdot \upsilon\Delta t \cdot l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L|I - 0| = B \cdot \Delta x \cdot l \Rightarrow LI = B \cdot (x - 0) \cdot l \Rightarrow LI = B \cdot l \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{B \cdot l}{L} \cdot x$$

Στον $K\Lambda$ θα ασκείται δύναμη Laplace αντίρροπη της κίνησης:

$$F_L = -BIl = -B\left(\frac{Bl}{L} \cdot x\right) \cdot l \Rightarrow F_L = -\frac{B^2 l^2}{L} \cdot x$$

Η δύναμη είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$ με $D = \frac{B^2 l^2}{L}$, οπότε το ΚΜ της ράβδου εκτελεί αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{B^2 l^2}{L}}} = \frac{2\pi}{Bl}\sqrt{m \cdot L}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{Bl}\sqrt{m \cdot L}} \Rightarrow \omega = \frac{Bl}{\sqrt{m \cdot L}}$$

Η ταχύτητα εκτόξευσης στη Θέση Ισορροπίας είναι η μέγιστη της ταλάντωσης:

$$\upsilon_o = \omega A = \frac{Bl}{\sqrt{m \cdot L}} A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_o}{Bl}\sqrt{m \cdot L}$$

Η ταχύτητα της ράβδου θα μηδενιστεί στιγμιαία τη στιγμή:

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2Bl}\sqrt{m \cdot L} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2} s$$

Β.2. Η μετατόπιση την στιγμή αυτή ισούται με:

$$\Delta x = A = \frac{\upsilon_o}{Bl}\sqrt{m \cdot L} \Rightarrow \Delta x = 2m$$

Β.3. Εφόσον δεν έχουμε αντιστάτες και θερμική εκπομπή ενέργειας, τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του αγωγού, η αρχική κινητική της ράβδου μετατρέπεται σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου πηνίου:

$$U_B = \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 \Rightarrow U_B = 0{,}4J$$

3ο ΘΕΜΑ

Γ.1. Έστω M η μάζα του σώματος Σ, M_Π η μάζα του πλανήτη και G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Το σώμα Σ διασπάται μετά την έκρηξη στα κομμάτια 1 με μάζα $m_1 = rM$ και 2 με μάζα $m_2 = (1-r)M$. Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την έκρηξη είναι εσωτερικές για το σώμα Σ, δηλαδή η ορμή διατηρείται, οπότε:

$$\vec{P}_{\text{ΟΛ(αρχ)}} = \vec{P}_{\text{ΟΛ(τελ)}} \Rightarrow 0 = m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 \Rightarrow r\cancel{M}\upsilon_1 = (1-r)\cancel{M}\upsilon_2 \Rightarrow r\upsilon_1 = (1-r)\upsilon_2 \quad (1)$$

Για να γίνει το κομμάτι 1 δορυφόρος, θα πρέπει:

$$F_{\text{κεντρ},1} = F_{\text{βαρ},1} \Rightarrow \frac{\cancel{m_1}\upsilon_1^2}{\cancel{R}} = \frac{GM_\Pi \cancel{m_1}}{R^{\cancel{2}}} \Rightarrow \upsilon_1^2 = \frac{GM_\Pi}{R} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM_\Pi}{R}} \quad (2)$$

Επειδή το κομμάτι 2, μετά την έκρηξη, κινείται με την επίδραση διατηρητικής δύναμης:

$$E_{\text{ΜΗΧ(αρχ)}} = E_{\text{ΜΗΧ(τελ)}} \Rightarrow K_{(\text{αρχ})} + U_{\text{ΒΑΡ(αρχ)}} = K_{(\text{τελ})} + U_{\text{ΒΑΡ(τελ)}} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m_2}\upsilon_2^2 - \frac{GM_\Pi \cancel{m_2}}{R} = 0 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_2^2 = \frac{2GM_\Pi}{R} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2GM_\Pi}{R}} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1), έχουμε:

$$r\upsilon_1 = (1-r)\upsilon_2 \Rightarrow r\sqrt{\frac{\cancel{GM_\Pi}}{\cancel{R}}} = (1-r)\sqrt{\frac{2\cancel{GM_\Pi}}{\cancel{R}}} \Rightarrow r = (1-r)\sqrt{2} \Rightarrow r\left(1+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} \Rightarrow r = \frac{2-\sqrt{2}}{2-1} \Rightarrow r = 2-\sqrt{2} \quad (4)$$

Ο λόγος των μαζών των κομματιών 1 και 2 θα είναι:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{r\cancel{M}}{(1-r)\cancel{M}}\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{r}{1-r}\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{2-\sqrt{2}}{1-2+\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2-1}\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=\sqrt{2}-\cancel{2}+\cancel{2}\Rightarrow\boxed{\frac{m_1}{m_2}=\sqrt{2}}\quad(5)$$

Γ.2. Το σώμα Σ΄ διασπάται μετά την έκρηξη στα κομμάτια 1΄ με μάζα $m'_1=r'M$ και 2΄ με μάζα $m'_2=(1-r')M$. Οι δυνάμεις κατά την έκρηξη είναι εσωτερικές για το σώμα Σ΄, δηλαδή η ορμή διατηρείται, οπότε:

$$\vec{P}'_{\text{ΟΛ(αρχ)}}=\vec{P}'_{\text{ΟΛ(τελ)}}\Rightarrow 0=m'_1\upsilon'_1-m'_2\upsilon_2\Rightarrow r'\cancel{M}\upsilon'_1=(1-r')\cancel{M}\upsilon'_2\Rightarrow r'\upsilon'_1=(1-r')\upsilon'_2\quad(6)$$

Το κομμάτι 1΄, μετά την έκρηξη, κινείται με την επίδραση διατηρητικής δύναμης και μεταβαίνει σε απόσταση R_1, όπου έχει ταχύτητα υ''_1, οπότε:

$$E_{1',\text{ΜΗΧ(αρχ)}}=E_{1',\text{ΜΗΧ(τελ)}}\Rightarrow K_{1',\text{(αρχ)}}+U_{1',\text{ΒΑΡ(αρχ)}}=K_{1',\text{(τελ)}}+U_{1',\text{ΒΑΡ(τελ)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cancel{m_1}\upsilon_1'^2-\frac{GM_\Pi\cancel{m_1}}{R}=\frac{1}{2}\cancel{m_1}\upsilon_1''^2-\frac{GM_\Pi\cancel{m_1}}{R_1}\Rightarrow\frac{1}{2}\upsilon_1'^2-\frac{GM_\Pi}{R}=\frac{1}{2}\upsilon_1''^2-\frac{GM_\Pi}{R_1}\Rightarrow$$

$$\upsilon_1'^2=\upsilon_1''^2+\frac{2GM_\Pi}{R}-\frac{2GM_\Pi}{R_1}\quad(7)$$

Στην απόσταση R_1 το κομμάτι 1΄ γίνεται δορυφόρος, οπότε:

$$F'_{\text{κεντρ},1}=F'_{\text{βαρ},1}\Rightarrow\frac{\cancel{m_1}\upsilon_1''^2}{\cancel{R_1}}=\frac{GM_\Pi\cancel{m_1}}{R_1^{\cancel{2}}}\Rightarrow\upsilon_1''^2=\frac{GM_\Pi}{R_1}\quad(8)$$

Από τις (8) και (7) παίρνουμε:

$$\upsilon_1'^2=\frac{GM_\Pi}{R_1}+\frac{2GM_\Pi}{R}-\frac{2GM_\Pi}{R_1}\Rightarrow\upsilon_1'^2=\frac{2GM_\Pi}{R}-\frac{GM_\Pi}{R_1}\Rightarrow\upsilon_1'^2=GM_\Pi\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\upsilon'_1=\sqrt{GM_\Pi\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}\quad(9)$$

Ακολουθώντας αντίστοιχα βήματα για το κομμάτι 2΄, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\upsilon_2' = \sqrt{GM_\Pi\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{R_2}\right)} \quad (10)$$

Αντικαθιστώντας τις (9) και (10) στην (6), έχουμε:

$$r'\upsilon_1' = (1-r')\upsilon_2' \Rightarrow r'\sqrt{\cancel{GM_\Pi}\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{R_1}\right)} = (1-r')\sqrt{\cancel{GM_\Pi}\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{R_2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'\sqrt{\frac{2}{R}-\frac{1}{R_1}} = (1-r')\sqrt{\frac{2}{R}-\frac{1}{R_2}} \Rightarrow r'\cancel{\sqrt{\frac{2}{R}}}\sqrt{1-\frac{R}{2R_1}} = (1-r')\cancel{\sqrt{\frac{2}{R}}}\sqrt{1-\frac{R}{2R_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'\sqrt{1-\frac{R}{2R_1}} = (1-r')\sqrt{1-\frac{R}{2R_2}} \quad (11)$$

Αντικαθιστώντας, τώρα, $R_1 = 2R$ και $R_2 = 3R/2$ στην (11), έχουμε:

$$r'\sqrt{1-\frac{\cancel{R}}{2\cdot 2\cancel{R}}} = (1-r')\sqrt{1-\frac{\cancel{R}}{\cancel{2}\frac{3\cancel{R}}{\cancel{2}}}} \Rightarrow r'\sqrt{1-\frac{1}{4}} = (1-r')\sqrt{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow r'\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{1}{4}} = (1-r')\sqrt{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'\sqrt{\frac{3}{4}} = (1-r')\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow r'\frac{\sqrt{3}}{2} = (1-r')\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow r' = (1-r')\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow r'\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'\left(3+2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} \Rightarrow r' = \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \quad (12)$$

Ο λόγος των μαζών των κομματιών 1΄ και 2΄ θα είναι:

$$\frac{m_1'}{m_2'} = \frac{r'\cancel{M}}{(1-r')\cancel{M}} \Rightarrow \frac{m_1'}{m_2'} = \frac{r'}{1-r'} \Rightarrow \frac{m_1'}{m_2'} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}{1-\frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{m_1'}{m_2'} = \frac{2\sqrt{2}}{3+\cancel{2\sqrt{2}}-\cancel{2\sqrt{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_1'}{m_2'} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{2}} \quad (13)$$

Γ.3. Η ενέργεια που προσδίδεται από την έκρηξη στα κομμάτια του σώματος στην περίπτωση Α ισούται με την κινητική ενέργεια των σωμάτων, αμέσως μετά την έκρηξη. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2), (3) και (4) θα έχουμε:

$$E_{\mathrm{A}} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}rM\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}(1-r)M\upsilon_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)M\,\frac{GM_{\Pi}}{R} + \frac{1}{2}\left(1-2+\sqrt{2}\right)M\,\frac{2GM_{\Pi}}{R} = \frac{GMM_{\Pi}}{2R}\left(\cancel{2}-\sqrt{2}-\cancel{2}+2\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$E_{\mathrm{A}} = \frac{GMM_{\Pi}}{2R}\sqrt{2} \quad (14)$$

Για την περίπτωση Β, οι σχέσεις (9) και (10), χρησιμοποιώντας $R_1 = 2R$ και $R_2 = 3R/2$, μετασχηματίζονται σε:

$$\upsilon_1'^2 = GM_{\Pi}\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{2R}\right) \Rightarrow \upsilon_1'^2 = \frac{GM_{\Pi}}{R}\frac{3}{2} \quad (15)$$

$$\upsilon_2'^2 = GM_{\Pi}\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{\frac{3}{2}R}\right) \Rightarrow \upsilon_2'^2 = \frac{GM_{\Pi}}{R}\left(2-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \upsilon_2'^2 = \frac{GM_{\Pi}}{R}\frac{4}{3} \quad (16)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (15), (16) και (12) θα έχουμε:

$$E_{\mathrm{B}} = K_1' + K_2' = \frac{1}{2}m_1'\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2'\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}r'M\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}(1-r')M\upsilon_2'^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}M\frac{GM_{\Pi}}{R}\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)M\frac{2GM_{\Pi}}{R}\frac{4}{3} =$$

$$= \frac{GMM_{\Pi}}{2R}\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{3}+\cancel{2\sqrt{2}}-\cancel{2\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\right) = \frac{GMM_{\Pi}}{2R}\left(\frac{3\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} + \frac{4}{3+2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{GMM_{\Pi}}{2R}\frac{4+3\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{GMM_{\Pi}}{2R}\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)} = \frac{GMM_{\Pi}}{2R}\frac{\cancel{12}+9\sqrt{2}-8\sqrt{2}-\cancel{6\cdot 2}}{9-4\cdot 2} =$$

$$=\frac{GMM_{\Pi}}{2R}\frac{\sqrt{2}}{1}\Rightarrow E_{B}=\frac{GMM_{\Pi}}{2R}\sqrt{2}\ (17)$$

Από τις (14) και (17) έχουμε:

$$\frac{E_A}{E_B}=\frac{\cancel{\frac{GMM_{\Pi}}{2R}}\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\frac{GMM_{\Pi}}{2R}}\cancel{\sqrt{2}}}\Rightarrow\boxed{\frac{E_A}{E_B}=1}$$