ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2022 - Γ′ Τάξη

Β΄ Φάση 18/06/2022

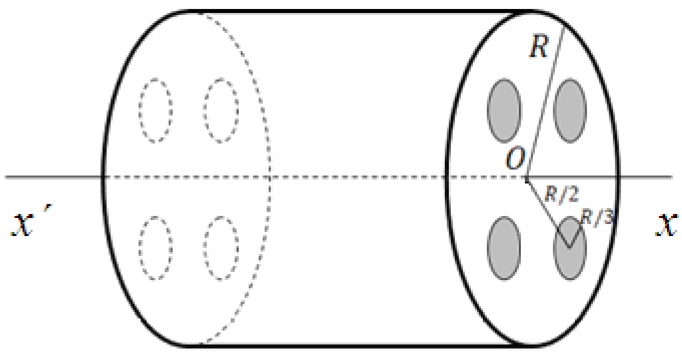
ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Οι απαντήσεις σε *όλα* τα ερωτήματα θα πρέπει να αναγραφούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που ακολουθεί μετά το τέλος των εκφωνήσεων.
2. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε φύλλα Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί. Τα υλικά αυτά θα παραδοθούν στο τέλος της εξέτασης μαζί με το ***Φύλλο Απαντήσεων***.

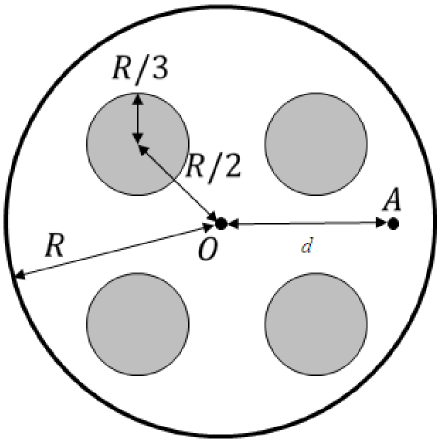
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1^Ο ΘΕΜΑ

Από ομογενή και συμπαγή κύλινδρο μάζας M_0 και ακτίνας R έχουν αφαιρεθεί τέσσερα όμοια κυλινδρικά τμήματα, όπου το καθένα έχει μάζα m και ακτίνα $\frac{R}{3}$, με αποτέλεσμα να προκύπτει στερεό Σ. Ο άξονας του κάθε κενού τμήματος βρίσκεται σε απόσταση $\frac{R}{2}$ από τον κεντρικό άξονα x’Οx του κυλίνδρου.



Α.1. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας *I*, του στερεού σώματος Σ, ως προς τον άξονα x’Οx.

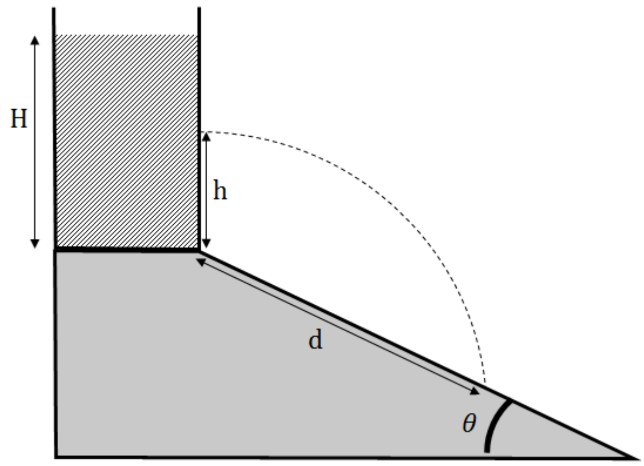


Α.2. Το στερεό σώμα που προέκυψε μετά την αφαίρεση των τμημάτων μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, υπό την επίδραση της ροπής του βάρους του, γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα Ρ, ο οποίος βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τον x’Οx, και τέμνει τη μία βάση του κυλίνδρου σε σημείο Α. Θέλουμε να επιλέξουμε τον άξονα Ρ σε τέτοια θέση ώστε το στερεό Σ να ξεκινά την περιστροφή του με μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση. Να υπολογιστεί η απόσταση *d=(OA)*.

Δίνεται η ροπή αδράνειας συμπαγούς και ομογενούς κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των βάσεων του, $I_{cm} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$.

2^Ο ΘΕΜΑ

Στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου κλίσης θ τοποθετείται κυλινδρικό δοχείο που περιέχει νερό βάθους H.



Β.1. Σε ποιο ύψος h από τη βάση του δοχείου πρέπει να ανοιχτεί οπή πολύ μικρής διατομής, ώστε η απόσταση d που θα διανύει το νερό κατά μήκος του κ. επιπέδου να είναι μέγιστη;

Β.2. Για ποιες τιμές της θ (με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου) έχει νόημα το προηγούμενο αποτέλεσμα;

Β.3. Πόση είναι η μέγιστη απόσταση d_{max} που διανύει το νερό κατά μήκος του κ. επιπέδου;

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση προς g στον τόπο του πειράματος.

Καλή Επιτυχία

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Όνομα και Επώνυμο: ……………………………………………………
Όνομα Πατέρα: …………………….. Όνομα Μητέρας: …………………..
Τηλ. Οικίας: ………………….. Κινητό τηλέφωνο: ……………………..….
e-mail: ……………………..………………………………

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1$^{\text{Ο}}$ ΘΕΜΑ

Α.1. $I =$…………………….. **Α.2.** $x =$……………………

2$^{\text{Ο}}$ ΘΕΜΑ

Β.1. $h =$……………………..

Β.2. $\theta \in$…………….. Ή $\varepsilon\varphi\theta$……………. **(συμπληρώστε μόνο ένα από τα δύο κενά)**

Β.3. $d_{max} =$……………………

Συνοπτικές Απαντήσεις

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1^{Ο} ΘΕΜΑ

Α.1. Έστω *I_0* η ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στις βάσεις του κυλίνδρου που διέρχεται από το σημείο Ο πριν αφαιρεθούν τα επιμέρους κυλινδρικά τμήματα, *I'* η ροπή αδράνειας του κάθε επιμέρους κομματιού και *$I_Σ$* η ροπή αδράνειας του στερεού Σ, ως προς τον ίδιο άξονα, οι οποίες συνδέονται με την σχέση:

$$I_0 = 4 \cdot I' + I_Σ$$

ή, $I_Σ = I_0 - 4 \cdot I' \ (1)$

όπου, $I_0 = \frac{1}{2} \cdot M_0 \cdot R^2 (2)$ και

$$I' = I'_{cm} + m \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^2 + m \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{11}{36} \cdot m \cdot R^2 (3)$$

Αν ρ είναι η πυκνότητα του υλικού από το οποίο έχει κατασκευαστεί ο κύλινδρος για τις μάζες m και M_0 θα ισχύει:

$M_0 = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$, $m = \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h$, όπου h το ύψος του κυλίνδρου και ο λόγος τους θα είναι ίσος με, $\frac{m}{M_0} = \frac{1}{9}$ (4).

Άρα η μάζα Μ του στερεού Σ θα είναι,

$M = M_0 - m = M_0 - 4 \cdot \frac{M_0}{9} = \frac{5}{9} M_0$ και $m = \frac{M}{5}$ *(5)*

Από *(1), (2), (3) (4), (5):* $I_Σ = \frac{1}{2} \cdot M_0 \cdot R^2 - 4 \cdot \frac{11}{36} \cdot \frac{M_0}{9} \cdot R^2 = \frac{59}{162} \cdot M_0 \cdot R^2$

Α.2. Η ροπή αδράνειας του στερεού Σ ως προς τον άξονα Α θα είναι:

$I_Σ = \frac{59}{90} \cdot M \cdot R^2 + M \cdot x^2$ *(1).* Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της Στροφικής κίνησης για την αρχική θέση του στερεού σώματος Σ:

$$Στ_A = I_A \cdot \alpha_{γων} \Leftrightarrow M \cdot g \cdot x = \left(\frac{59}{90} \cdot M \cdot R^2 + M \cdot x^2\right) \cdot \alpha_{γων} και,$$

$$\alpha_{γων} = \frac{g \cdot x}{\frac{59}{90} \cdot R^2 + x^2} = \frac{g}{\frac{59}{90} \cdot \frac{R^2}{x} + x}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$ γίνεται μέγιστη όταν ο όρος $\frac{59}{90} \cdot \frac{R^2}{x} + x$ πάρει την ελάχιστη τιμή του.

Έστω c $= \frac{59}{90} \cdot R^2$, ο σταθερός όρος που εμφανίζεται στον παρονομαστή ο οποίος περιγράφεται από τη συνάρτηση: *f(x)* $= \frac{c}{x} + x$.

<u>**Α΄ τρόπος υπολογισμού ελαχίστου**</u>:

Η πρώτη παράγωγος της *f(x)* είναι ίση με $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x} + x\right) = 1 - \frac{c}{x^2}$ η οποία μηδενίζεται όταν $1 =$

$\frac{c}{x^2}$ ή όταν

$x^2 = \frac{59}{90} \cdot R^2$, δηλαδή, $x = \sqrt{\frac{59}{90}} \cdot R \cong 0{,}81 \cdot R$.

Αν υπολογίσουμε και την δεύτερη παράγωγο της *f(x)* προκύπτει

$\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{c}{x^2}\right) = \frac{2 \cdot c}{x^3} > 0$, άρα πράγματι για $x = \sqrt{\frac{59}{90}} \cdot R \cong 0{,}81 \cdot R$ ο παρονομαστής λαμβάνει τη ελάχιστη τιμή του, οπότε και η γωνιακή επιτάχυνση γίνεται μέγιστη.

<u>Β΄ τρόπος υπολογισμού ελαχίστου</u>:

$$\frac{c}{x} + x = \frac{c + x^2}{x} \geq 2\sqrt{c} \quad \text{για} \quad x>0$$

Η ελάχιστη τιμή αντιστοιχεί στην ισότητα δηλ.

$$\frac{c + x^2}{x} = 2\sqrt{c} \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{c}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{c}$$

Οπότε καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $x = \sqrt{\frac{59}{90}} \cdot R \cong 0{,}81 \cdot R$

<u>Γ΄ τρόπος υπολογισμού ελαχίστου</u>:

Στην έκφραση της γωνιακής ταχύτητας

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{g}{\frac{59}{90} \cdot \frac{R^2}{x} + x}$$

Παρατηρούμε ότι οι προσθετέοι του παρονομαστή έχουν γινόμενο:

$$\frac{59}{90} \cdot \frac{R^2}{x} \cdot x = \frac{59 \cdot R^2}{90} = \sigma\tau\alpha\theta$$

Από τα Μαθηματικά γνωρίζουμε ότι δύο αριθμοί με σταθερό γινόμενο έχουν ελάχιστο άθροισμα όταν είναι ίσοι. Συνεπώς η $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ μεγιστοποιείται για

$$\frac{59}{90} \cdot \frac{R^2}{x} = x \Rightarrow \frac{59 \cdot R^2}{90} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{59}{90}} \cdot R \cong 0{,}81 \cdot R$$

<u>Δ΄ τρόπος υπολογισμού ελαχίστου</u>:

Η έκφραση της γωνιακής ταχύτητας γράφεται

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{g}{\frac{59}{90} \cdot \frac{R^2}{x} + x} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{g}{\frac{59 \cdot R^2 + 90 \cdot x^2}{90 \cdot x}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{90 \cdot g \cdot x}{59 \cdot R^2 + 90 \cdot x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot x^2 + 59 \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = 90 \cdot g \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot x^2 - 90 \cdot g \cdot x + 59 \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι τριώνυμο ως προς x και έχει *οπωσδήποτε* λύση. Συνεπώς πρέπει να ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (90 \cdot g)^2 - 4 \cdot 90 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}^2 \cdot 59 \cdot R^2 \geq 0 \Rightarrow (90 \cdot g)^2 \geq 4 \cdot 90 \cdot 59 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}^2 \cdot R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90 \cdot g^2 \geq 4 \cdot 59 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}^2 \cdot R^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}^2 \leq \frac{90 \cdot g^2}{4 \cdot 59 \cdot R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} \leq \sqrt{\frac{90}{59} \cdot \frac{g}{2 \cdot R}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,max} = \sqrt{\frac{90}{59} \cdot \frac{g}{2 \cdot R}}$$

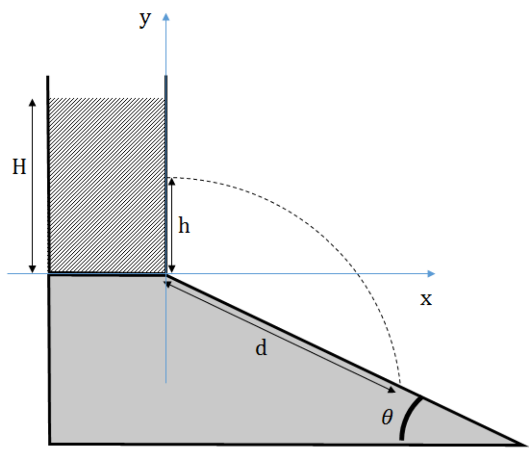
Για την τιμή αυτή της $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η διακρίνουσα μηδενίζεται και το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα:

$$x = \frac{90 \cdot g}{2 \cdot 90 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,max}} \Rightarrow x = \frac{g}{2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,max}} \Rightarrow x = \frac{g}{2 \cdot \sqrt{\frac{90}{59} \cdot \frac{g}{2 \cdot R}}} \Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{\frac{90}{59}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{59}{90}} R \cong 0{,}81 \cdot R$$

2^{Ο} ΘΕΜΑ

Β.1. Το νερό που εξέρχεται από την οπή εκτελεί οριζόντια βολή. Θεωρώντας ότι η αρχή του συστήματος αναφοράς συμπίπτει με την κορυφή του κ. επιπέδου (βλ. σχ.), η εξίσωση τροχιάς της λεπτής φλέβας νερού είναι:



$$y = h - \frac{g}{2\upsilon^2} x^2 \quad (1)$$

Η ταχύτητα εξόδου του νερού από την οπή (θεώρημα Torricelli) είναι:

$$\upsilon = \sqrt{2g(H-h)} \quad (2)$$

ενώ η εξίσωση της επιφάνειας του κ. επιπέδου είναι:

$$y = -x\varepsilon\varphi\theta \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις τρεις σχέσεις καταλήγουμε:

$$-x\varepsilon\varphi\theta = h - \frac{x^2}{4(H-h)} \Rightarrow -4(H-h)x\varepsilon\varphi\theta = 4(H-h)h - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4Hx\varepsilon\varphi\theta + 4hx\varepsilon\varphi\theta = 4Hh - 4h^2 - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4h^2 + 4(x\varepsilon\varphi\theta - H)h + x^2 - 4Hx\varepsilon\varphi\theta = 0 \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) είναι δευτεροβάθμια ως προς h και έχει οπωσδήποτε λύση, άρα:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 16(x\varepsilon\varphi\theta - H)^2 - 4 \cdot 4(x^2 - 4Hx\varepsilon\varphi\theta) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x\varepsilon\varphi\theta - H)^2 - x^2 + 4Hx\varepsilon\varphi\theta \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x\varepsilon\varphi\theta)^2 + H^2 - 2xH\varepsilon\varphi\theta - x^2 + 4Hx\varepsilon\varphi\theta \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x\varepsilon\varphi\theta)^2 + H^2 + 2xH\varepsilon\varphi\theta - x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x\varepsilon\varphi\theta + H)^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x\varepsilon\varphi\theta + H + x)(x\varepsilon\varphi\theta + H - x) \geq 0$$

Ο πρώτος όρος είναι προφανώς θετικός, άρα πρέπει:

$$x\varepsilon\varphi\theta + H - x \geq 0 \Rightarrow x(\varepsilon\varphi\theta - 1) + H \geq 0 \Rightarrow H \geq x(1 - \varepsilon\varphi\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{H}{1 - \varepsilon\varphi\theta}$$

Συνεπώς:

$$x_{max} = \frac{H}{1-\varepsilon\varphi\theta} \quad (5)$$

Για αυτή την τιμή του x έχουμε $\Delta = 0$, οπότε:

$$h = \frac{-4(x_{max}\varepsilon\varphi\theta - H)}{2 \cdot 4} \Rightarrow h = \frac{H - x_{max}\varepsilon\varphi\theta}{2} \Rightarrow h = \frac{H - \dfrac{H}{1 - \varepsilon\varphi\theta}\varepsilon\varphi\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{H(1-2\varepsilon\varphi\theta)}{2(1-\varepsilon\varphi\theta)} \quad (6)$$

B.2. Επειδή το x_{max} δε μπορεί να γίνει αρνητικό, από την (5) έχουμε τον περιορισμό:

$$1 - \varepsilon\varphi\theta > 0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta < 1 \Rightarrow \theta < 45^o \quad (7)$$

Επειδή το h δε μπορεί να γίνει αρνητικό από την (6) θα πρέπει να ισχύει:

$$\left.\begin{array}{r} 1 - 2\varepsilon\varphi\theta \geq 0 \\ 1 - \varepsilon\varphi\theta > 0 \end{array}\right\}$$

ή

$$\left.\begin{array}{r} 1 - 2\varepsilon\varphi\theta \leq 0 \\ 1 - \varepsilon\varphi\theta < 0 \end{array}\right\}$$

Η δεύτερη εκδοχή απορρίπτεται εξ αιτίας του περιορισμού (7), άρα τελικά προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{2} \geq \varepsilon\varphi\theta \\ 1 > \varepsilon\varphi\theta\end{array}\right\}$$

οι οποίες συναληθεύουν όταν:

$$\varepsilon\varphi\theta \leq \tfrac{1}{2} \quad (8)$$

Δηλ. (κατά προσέγγιση) $\theta \leq 26{,}56505^o$, την οποία στρογγυλοποιούμε (**προς τα κάτω**) στην τιμή:

$$\theta \leq 26{,}5^o$$

Η ύπαρξη του κ. επιπέδου καθιστά υποχρεωτική την σχέση:

$$\theta > 0^o$$

Άρα (κατά προσέγγιση):

$$\theta \in (0\,,26{,}5^o]$$

Β.3. Για την d_{max} έχουμε:

$$d_{max} = \frac{x_{max}}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow d_{max} = \frac{H}{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\varepsilon\varphi\theta)} \Rightarrow d_{max} = \frac{H}{\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}$$

Ο περιορισμός (8) εξασφαλίζει ότι και αυτό το αποτέλεσμα είναι πάντα θετικό.

Στο διάστημα $(0\,,\;26{,}5^o]$ η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu$ είναι γνησίως φθίνουσα και η $\eta\mu$ γνησίως αύξουσα. Άρα, η ελάχιστη τιμή της διαφοράς τους θα αντιστοιχεί σε:

$$\theta_{max} \cong 26{,}5^o$$

Τελικά έχουμε:

$$d_{max} = \frac{H}{\sigma\upsilon\nu\theta_{max} - \eta\mu\theta_{max}} \Leftrightarrow d_{max} \cong \frac{H}{0{,}4487} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d_{max} \cong 2{,}23H$$