**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2019 - Γ΄ Τάξη**

Β΄ Φάση 04/05/2019

***ΟΔΗΓΙΕΣ:***

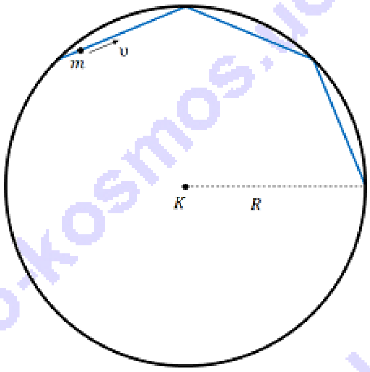
1. Οι απαντήσεις σε *όλα* τα ερωτήματα θα πρέπει να αναγραφούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που θα σας δοθεί μαζί με τις εκφωνήσεις.
2. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε φύλλα Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί. Τα υλικά αυτά θα παραδοθούν στο τέλος της εξέτασης μαζί με το ***Φύλλο Απαντήσεων***.
3. Όπου ζητούνται γραφήματα θα σχεδιαστούν στους ειδικούς χώρους του ***Φύλλου Απαντήσεων***.

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

### 1ο ΘΕΜΑ

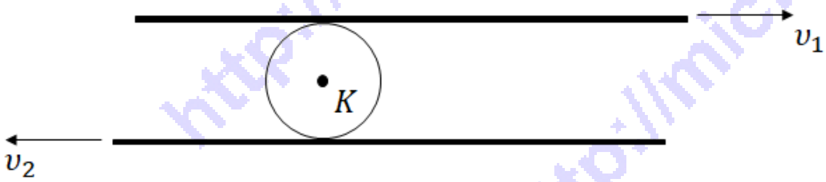
**Α.1.** Υλικό σημείο εκτελεί Γ.Α.Τ. πλάτους $A$. Να υπολογίσετε το ελάχιστο μήκος τροχιάς $\Delta s_{min}$ που διαγράφει το υλικό σημείο σε χρονικό διάστημα ίσο προς το $1/3$ της περιόδου ταλάντωσής του.

**Α.2.** Έστω υλικό σημείο μάζας $m$ που κινείται, με ταχύτητα σταθερού μέτρου $\upsilon$, στο εσωτερικό ακλόνητου δακτυλίου αμελητέου πάχους και ακτίνας $R$, διαγράφοντας τροχιά σχήματος κανονικού ν-γώνου. Υποθέστε ότι οι κρούσεις του υλικού σημείου με το δακτύλιο (που πραγματοποιούνται στις κορφές του κανονικού ν-γώνου) είναι ελαστικές. Θεωρώντας ότι η κίνηση πραγματοποιείται εκτός βαρυτικού πεδίου, και ότι η χρονική διάρκεια κάθε κρούσης με τα τοιχώματα μπορεί να προσεγγιστεί από το χρόνο που απαιτείται για τη μετάβαση από το ένα σημείο κρούσης στο επόμενο, να βρείτε τη δύναμη $\vec{F}_\mu$ που δέχεται το υλικό σημείο σε κάθε κρούση του με το δακτύλιο.




Υπενθυμίζονται οι τριγωνομετρικές ταυτότητες: $\eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu 2\theta = 1 - 2\eta\mu^2\theta$.

**Α.3.** Ομογενής κύλινδρος κέντρου $K$ και ακτίνας $R = 8cm$, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ευρισκόμενος σε επαφή με δύο οριζόντιες, ομογενείς ράβδους, οι οποίες κινούνται με ταχύτητες μέτρων $\upsilon_1 = 20cm/s$ και $\upsilon_2 = 12cm/s$ (βλ. σχήμα). Να προσδιορίσετε:

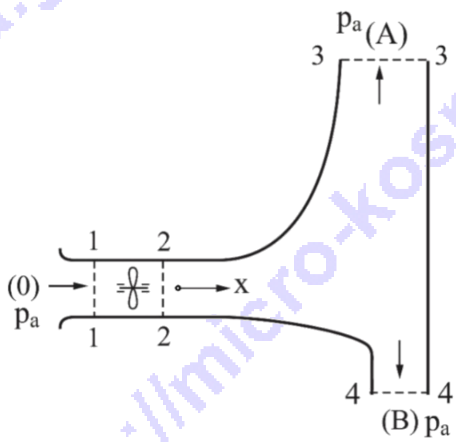



**Α.3.1.** την ταχύτητα $\upsilon_K$ του κέντρου μάζας $K$ και τη γωνιακή ταχύτητα $\omega$ του κυλίνδρου.

**Α.3.2.** τις συντεταγμένες (ως προς το κέντρο μάζας) σημείου $M(x_M, y_M)$ του κυλίνδρου που έχει κάθε στιγμή ταχύτητα 0.

### 2ο ΘΕΜΑ

Ο φυσητήρας του σχήματος αναρροφά μόνιμα αέρα από το περιβάλλον (0) σταθερής πίεσης $p_a$ και τον οδηγεί μέσω του διακλαδιζομένου αγωγού σε χώρους (Α) και (Β) της ίδιας σταθερής πίεσης $p_a$, προς τις διατομές $A_3 = 4\,m^2$ και $A_4 = A_3/2$ αντίστοιχα, ενώ $A_1 = A_2 = A_3/4$. Η παρεχόμενη ισχύς από το φυσητήρα στο ρευστό αέρα είναι $P = 1\,kW$ και δίνεται από τη σχέση: $P = (p_2 - p_1)\,\Pi_o$, όπου $p_2$ και $p_1$ είναι οι στατικές πιέσεις του ρευστού αέρα εκατέρωθεν του φυσητήρα



στη θέση (2) και (1) αντίστοιχα, ενώ $\Pi_o$ είναι η παροχή όγκου αναρρόφησης του αέρα. Λόγω των σχετικά χαμηλών ταχυτήτων του αέρα που αναπτύσσονται στη διάταξη ο αέρας μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο ρευστό με σταθερή πυκνότητα $\rho = 1{,}2\, Kg/m^3$, ενώ η ροή μπορεί να θεωρηθεί ιδανική παντού, εκτός του χώρου μεταξύ των διατομών 1-1 και 2-2 εξ αιτίας της στροβιλότητας που προκαλεί στα στοιχεία ρευστού ο φυσητήρας. Οι κατανομές της ταχύτητας είναι ομοιόμορφες στις διατομές 1-1, 2-2, 3-3 και 4-4, ενώ χάρη στη σχετικά χαμηλή πυκνότητα του αέρα η βαρύτητα μπορεί να μην ληφθεί υπόψη.

Να προσδιοριστούν:

**Β.1.** Οι παροχές $\Pi_3$ και $\Pi_4$ του αέρα στους χώρους (Α) και (Β) αντίστοιχα.

**Β.2.** Το μέτρο και η φορά της οριζόντιας δύναμης $F$ που ασκείται από το ρευστό στο φυσητήρα, θεωρώντας ότι ισχύει $\mathrm{F} = (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2)\mathrm{A}_1$.

**3ο ΘΕΜΑ**

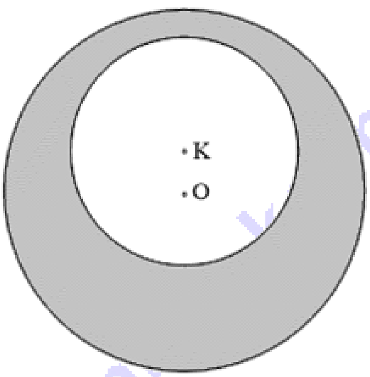
Γνωρίζουμε ότι ένα σώμα που βυθίζεται σε δοχείο με υγρό δέχεται από το υγρό μια διατηρητική δύναμη που ονομάζεται άνωση (επειδή, όταν το σώμα δεν εφάπτεται στον πυθμένα του δοχείου, έχει φορά προς τα πΆνω, όπως προκύπτει από την συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούν τα μόρια του υγρού στην επιφάνεια του σώματος) το μέτρο της οποίας ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού, ενώ το σημείο εφαρμογής της (που ονομάζεται αλλιώς και *κέντρο άνωσης*) συμπίπτει με το κέντρο μάζας του εκτοπιζόμενου υγρού.

**Γ.1.** Έστω ομογενής σφαίρα κέντρου $O$ και ακτίνας $R = 0{,}4m$, η οποία είναι βυθισμένη εξ ολοκλήρου σε νερό χωρίς να ακουμπά στον πυθμένα του δοχείου. Το κέντρο άνωσης βρίσκεται:

**i.** ψηλότερα από το $O$ , **ii.** στο $O$ , **iii.** χαμηλότερα από το $O$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

**Γ.2.** Ακολούθως δημιουργούμε στη σφαίρα μια σφαιρική κοιλότητα κέντρου $K$ και ακτίνας $r = \frac{3}{5}R$, αφαιρώντας υλικό της ομογενούς σφαίρας. Το $K$ απέχει $d = 9{,}8cm$ από το κέντρο $O$ της σφαίρας. Βυθίζουμε ξανά τη σφαίρα σε νερό όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, φροντίζοντας ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $OK$ να παραμένει κατακόρυφο (βλ. σχ.).




**Γ.2.1.** Το κέντρο μάζας της κοίλης σφαίρας βρίσκεται:

**i.** ψηλότερα από το $K$ , **ii.** στο $K$ , **iii.** μεταξύ των $O$ και $K$ ,

**iv.** στο $O$ , **v.** χαμηλότερα από το $O$

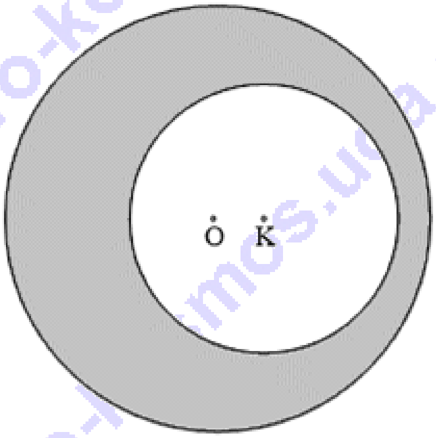
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

**Γ.2.2.** Το κέντρο άνωσης βρίσκεται:

**i.** ψηλότερα από το $K$ , **ii.** στο $K$ , **iii.** μεταξύ των $O$ και $K$
**iv.** στο $O$ , **v.** χαμηλότερα από το $O$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

**Γ.3.** Βυθίζουμε ξανά, με βραδύ ρυθμό ώστε να μη δημιουργηθούν αναταράξεις, τη σφαίρα εξ ολοκλήρου μέσα στο νερό, έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $OK$ να διατηρείται οριζόντιο και την αφήνουμε ελεύθερη, οπότε παρατηρούμε ότι αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα και κάποια στιγμή ακινητοποιείται. Το κέντρο μάζας της θα μετατοπιστεί; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.




**Γ.4.** Χρησιμοποιώντας ως αρχή του συστήματος αναφοράς το σημείο $O$, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες $x$, $y$ του σημείου τομής του άξονα, γύρω από τον οποίο θα περιστραφεί η κοίλη σφαίρα, με το επίπεδο του σχήματος.

**Γ.5.** Να υπολογίσετε την υψομετρική διαφορά $h$ μεταξύ της αρχικής θέσης του κέντρου $K$ (όταν αφήνεται ελεύθερη η κοίλη σφαίρα) και της τελικής θέσης του, όταν δηλαδή η σφαίρα ακινητοποιείται ισορροπώντας στην τελική της θέση.

**Γ.6.** Να βρείτε το ελάχιστο βάθος $y_{min}$ στο οποίο πρέπει να βυθίσουμε αρχικά το σημείο $O$, ώστε η σφαίρα να παραμένει ολόκληρη βυθισμένη μέσα στο νερό καθ΄ όλη τη διάρκεια της κίνησής της;

**Γ.7.** Να υπολογίσετε τη θερμική ενέργεια $Q$ που ελευθερώνεται κατά τη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας μέσα στο νερό, από την αρχική της θέση και μέχρι να ακινητοποιηθεί στην τελική της θέση.

Δίνονται: η πυκνότητα του νερού $\rho_\nu = 1\ g/cm^3$, η πυκνότητα του υλικού κατασκευής της ομογενούς σφαίρας ίση με $\rho = \frac{125}{98}\rho_\nu$, και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$ Για τις πράξεις θεωρείστε $\pi = 3{,}14$.

***Καλή Επιτυχία***

# ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΑΡΙΣΤ2019-……..

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

### 1ο ΘΕΜΑ

**Α.1.** $\Delta s_{min} =$…………………

**Α.2.** Μέτρο της $\vec{F}_\mu =$………………… Κατεύθυνση της $\vec{F}_\mu =$…………………………………

**Α.3.1.** $\upsilon_K =$…………… , $\omega =$…………… **Α.3.2.** $x_M =$……………, $y_M =$……………

### 2ο ΘΕΜΑ

**Β.1.** $\Pi_{3=}$…………………… $\Pi_{4=}$…………………

**Β.2.** $F =$ ………………… Φορά της $F$:……………………………………..

### 3ο ΘΕΜΑ

**Γ.1.** Σωστή πρόταση: …… **Γ.2.1.** Σωστή πρόταση: …… **Γ.2.2.** Σωστή πρόταση: ……

**Γ.3.** ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

**Αιτιολόγηση:**

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

**Γ.4.** $x =$………….. $y =$………….. **Γ.5.** $h =$…………..

**Γ.6.** $y_{min} =$…………. **Γ.7.** $Q =$………….

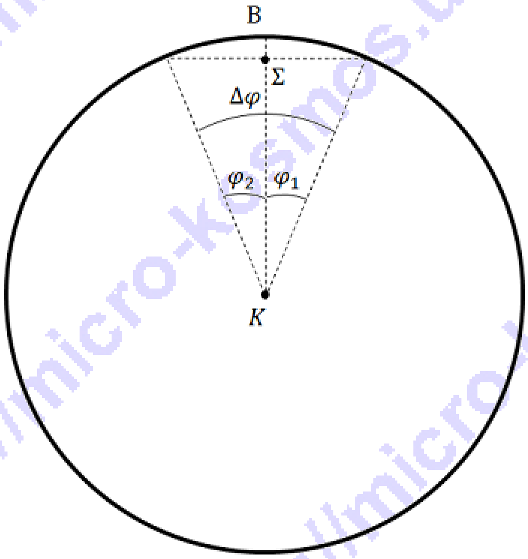
**Συνοπτικές Απαντήσεις**

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

### 1ο ΘΕΜΑ

**Α.1.** Η Γ.Α.Τ. είναι μεταβαλλόμενη κίνηση. Για δεδομένο χρονικό διάστημα, η ελάχιστη διανυόμενη απόσταση $\Delta s_{min}$ θα αντιστοιχεί σε μήκος διαδρομής μεταξύ θέσεων από τις οποίες ο ταλαντωτής διέρχεται με τις μικρότερες τιμές ταχύτητας, δηλ, θέσεων **πλησίον** των σημείων μέγιστης απομάκρυνσης. Επιπρόσθετα, αφού αναφερόμαστε σε χρονικό διάστημα $\frac{T}{3} > \frac{T}{4}$, πρέπει τα σημεία αυτά να βρίσκονται **εκατέρωθεν** των σημείων μέγιστης απομάκρυνσης

*Πρώτη παραλλαγή Λύσης*




Οι θέσεις αυτές πρέπει να είναι **συμμετρικές** ως προς τα σημεία μέγιστης απομάκρυνσης, προκειμένου στη διαδρομή να περιλαμβάνονται σημεία από τα οποία ο ταλαντωτής διέρχεται με τις ελάχιστες δυνατές τιμές ταχύτητας.

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση του στρεφόμενου διανύσματος που περιγράφει μαθηματικά την ταλάντωση, για τη $\Delta\varphi$ έχουμε:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{3} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Λόγω συμμετρίας είναι:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

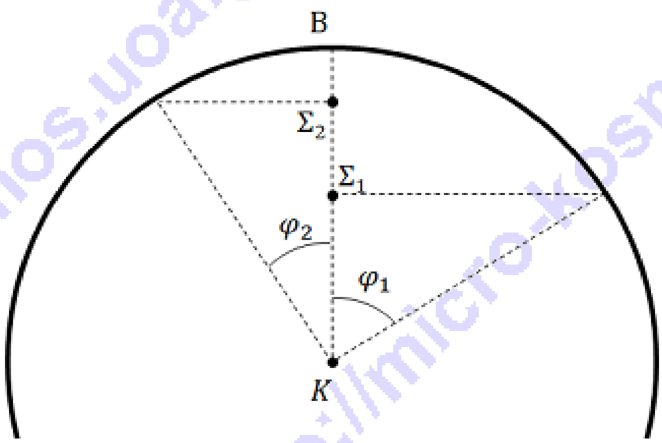
Δηλαδή:

$$\Delta s_{min} = \Sigma B + B\Sigma \Rightarrow \Delta s_{min} = 2 \cdot \Sigma B \Rightarrow \Delta s_{min} = 2 \cdot (KB - K\Sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s_{min} = 2 \cdot (A - A \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_1) \Rightarrow \Delta s_{min} = 2 \cdot \left(A - A \cdot \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s_{min} = A$$

*Δεύτερη παραλλαγή Λύσης*




Έστω $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ οι θέσεις αυτές (βλ. σχήμα), που αντιστοιχούν σε απομακρύνεις $x_1$ και $x_2$ του ταλαντωτή, τις στιγμές $t_1$ και $t_2 = t_1 + \frac{T}{3}$, αντίστοιχα. Το μήκος τροχιάς θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta s = \Sigma_1 B + B\Sigma_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = (A - x_1) + (A - x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = 2A - (x_1 + x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = 2A - \left[A\eta\mu\omega t_1 + A\eta\mu\omega\left(t_1 + \frac{T}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = 2A - A\left[\eta\mu\omega t_1 + \eta\mu\omega\left(t_1 + \frac{T}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = 2A - 2A\cdot\eta\mu\frac{\omega t_1 + \omega\left(t_1 + \frac{T}{3}\right)}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\omega t_1 - \omega\left(t_1 + \frac{T}{3}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = 2A - 2A\cdot\eta\mu\frac{\omega t_1 + \omega t_1 + \frac{2\pi}{3}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\omega t_1 - \omega t_1 - \frac{2\pi}{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = 2A - 2A\cdot\eta\mu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = 2A - 2A\cdot\eta\mu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = 2A - A\cdot\eta\mu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$$

Για να είναι ελάχιστο το μήκος s πρέπει ο όρος $A\cdot\eta\mu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$, δηλ. πρέπει:

$$\eta\mu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

από όπου προκύπτει:

$$\Delta s_{min} = 2A - A \Rightarrow \Delta s_{min} = A$$

Εξ άλλου, από τη μεγιστοποίηση του όρου $\eta\mu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$ προκύπτει ότι για τη μικρότερη τιμή της στιγμής $t_1$ ισχύει:

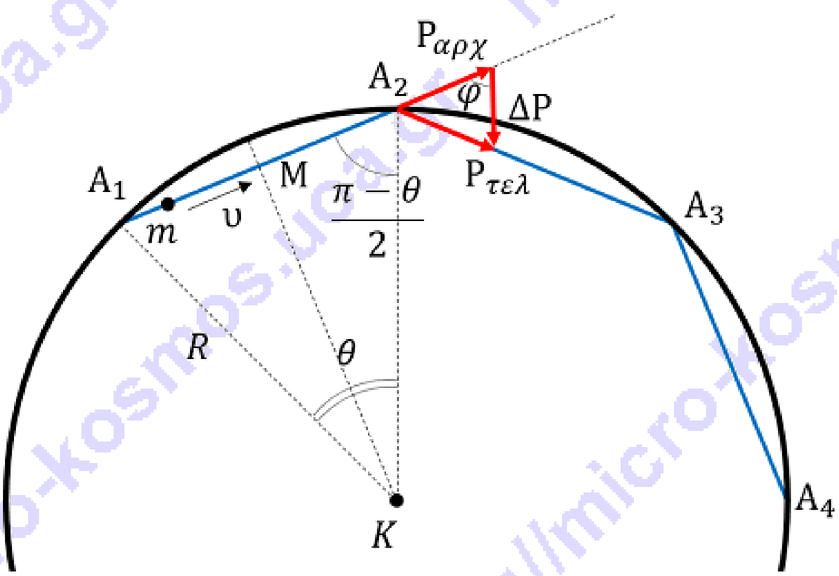
$$\omega t_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{12}$$

Δηλαδή τα σημεία $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ συμπίπτουν, οπότε αποδείξαμε με μαθηματικό τρόπο ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στο ελάχιστον μήκος διαδρομής, είναι **συμμετρικά** ως προς την ακραία θέση.

**Α.2.**. Σε κάθε σημείο κρούσης, ο δακτύλιος ασκεί δύναμη με αποτέλεσμα να αλλάζει η ορμή του υλικού σημείου. Επειδή, κατά την ελαστική κρούση, το μέτρο της ταχύτητας δε μεταβάλλεται, η αλλαγή αυτή αφορά μόνο στην κατεύθυνση της ορμής. Η απαιτούμενη δύναμη λοιπόν δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{F}_\mu = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

Για τη μεταβολή της ορμής



έχουμε:

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{P}_{\alpha\rho\chi}$$

Το τρίγωνο $KA_1A_2$ είναι ισοσκελές, άρα για τη γωνία $\widehat{A_1A_2}K$ ισχύει:

$$\widehat{A_1A_2}K = \frac{\pi - \theta}{2}$$

όπου με $\theta$ συμβολίζεται η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο $A_1A_2$.
Έχουμε λοιπόν:

$$\Delta P = \sqrt{{P_{\tau\varepsilon\lambda}}^2 + {P_{\alpha\rho\chi}}^2 + 2 \cdot P_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot P_{\alpha\rho\chi}\sigma\upsilon\nu\widehat{A_1A_2A_3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta P = \sqrt{m^2 \cdot \upsilon^2 + m^2 \cdot \upsilon^2 + 2 \cdot m\upsilon \cdot m\upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu(2 \cdot \widehat{A_1A_2}K)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta P = \sqrt{2 \cdot m^2 \cdot \upsilon^2 + 2 \cdot m^2 \cdot \upsilon^2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta P = m \cdot \upsilon \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \Delta P = m \cdot \upsilon \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu\theta)}$$

Εφαρμόζοντας την τριγωνομετρική ταυτότητα της εκφώνησης έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu\theta = 2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}$$

Τελικά λοιπόν έχουμε:

$$\Delta P = 2 \cdot m \cdot \upsilon \cdot \eta\mu\frac{\theta}{2}$$

ενώ

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{m \cdot \upsilon \cdot \eta\mu(\pi - \theta)}{m \cdot \upsilon + m \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\eta\mu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{\eta\mu\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \sigma\varphi\frac{\theta}{2} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi - \theta}{2}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο φορέας του $\Delta\vec{P}$ συμπίπτει με την ευθεία $A_2K$, άρα το διάνυσμα $\Delta\vec{P}$ έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου $K$.
Όπως αναφέρεται στην εκφώνηση μπορούμε να προσεγγίσουμε τη χρονική διάρκεια $\Delta t$ της κρούσης με το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων, δηλ. το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε το σώμα να διασχίσει μια πλευρά του κανονικού πολυγώνου (η προσέγγιση αυτή γίνεται ορθότερη καθώς αυξάνεται το πλήθος των πλευρών του κανονικού πολυγώνου). Μελετώντας την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση που εκτελεί το σώμα μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων κρούσης, έστω $A_1$ και $A_2$, με το δακτύλιο βλέπουμε ότι η απόστασή τους είναι:

$$A_1A_2 = 2 \cdot A_1M = 2 \cdot R \cdot \eta\mu\frac{\theta}{2}$$

Άρα:

$$\Delta t = \frac{A_1A_2}{\upsilon} \Rightarrow \Delta t = \frac{2 \cdot R \cdot \eta\mu\frac{\theta}{2}}{\upsilon}$$

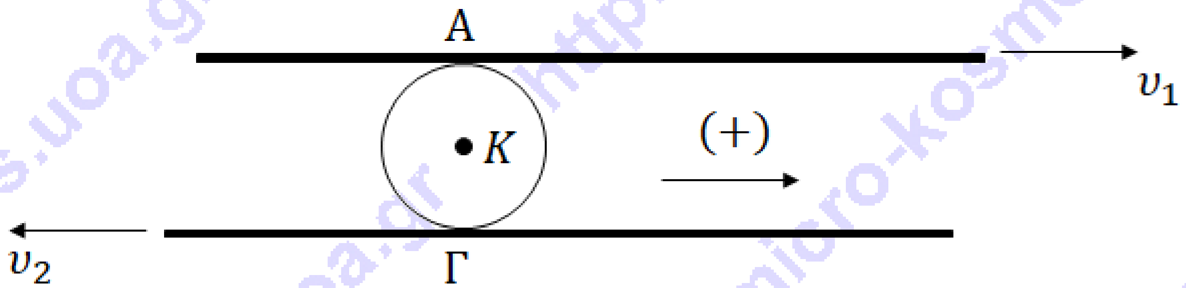
Προκύπτει λοιπόν:

$$F_\mu = \frac{2 \cdot m \cdot \upsilon \cdot \eta\mu\frac{\theta}{2}}{\frac{2 \cdot R \cdot \eta\mu\frac{\theta}{2}}{\upsilon}} \Rightarrow F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}$$

Δηλαδή η δύναμη έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου και μέτρο ίσο με εκείνο της κεντρομόλου δύναμης που θα έπρεπε να δέχεται το σώμα για να εκτελέσει Κυκλική Ομαλή Κίνηση.

**Α.3.1.** Έστω Α και Γ τα σημεία επαφής του κυλίνδρου με την πάνω και την κάτω ράβδο αντίστοιχα σε κάποια χρονική στιγμή. Αφού έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση, θα ισχύει:

$$\upsilon_1 = \upsilon_A \quad \text{και} \quad \upsilon_2 = \upsilon_\Gamma$$




Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά έχουμε:

$$\upsilon_1 = \upsilon_K + \omega R \quad (1)$$

και

$$-\upsilon_2 = \upsilon_K - \omega R \quad (2)$$

όπου με $\omega$ συμβολίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

Αθροίζοντας κατά μέλη έχουμε:

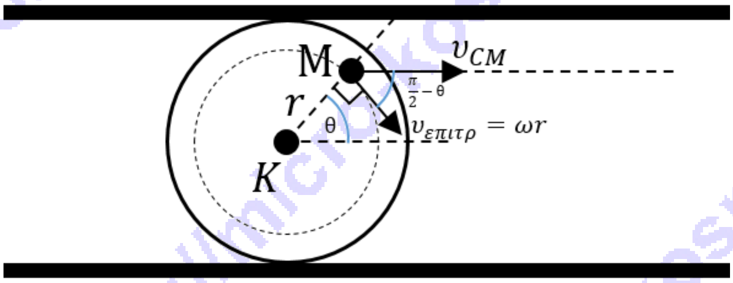
$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = 2\upsilon_K \Rightarrow \upsilon_K = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} \Rightarrow \upsilon_K = \frac{20 - 12}{2} cm/s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_K = 4\, cm/s$$

Από την εξίσωση (1) του συστήματος, για τη γωνιακή ταχύτητα έχουμε:

$$\omega R = \upsilon_1 - \upsilon_K \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_K}{R} \Rightarrow \omega = \frac{20 - 4}{8} rad/s \Rightarrow \omega = 2\, rad/s$$

**Α.3.2.** Έστω $M$ το ζητούμενο σημείο, το οποίο απέχει απόσταση (έστω) $r$ από το $K$ με την $KM$ να σχηματίζει γωνία $\theta$ με την οριζόντια διεύθυνση. Με παρόμοια προσέγγιση έχουμε:




$$\vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_K + \vec{\upsilon}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho} \Rightarrow \vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_K + \vec{\upsilon}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_M = \sqrt{\upsilon_K{}^2 + \upsilon_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}{}^2 + 2\upsilon_K \cdot \upsilon_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_M = \sqrt{\upsilon_K{}^2 + (\omega \cdot r)^2 + 2\upsilon_K \cdot \omega \cdot r \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_M = \sqrt{\upsilon_K{}^2 + \left(\upsilon_K \cdot \frac{\omega}{\upsilon_K} \cdot r\right)^2 + 2\upsilon_K \cdot \upsilon_K \cdot \frac{\omega}{\upsilon_K} \cdot r \cdot \eta\mu\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_M = \sqrt{\upsilon_K{}^2 + \left(\upsilon_K \cdot \frac{1}{r_1} \cdot r\right)^2 + 2\upsilon_K \cdot \upsilon_K \cdot \frac{1}{r_1} \cdot r \cdot \eta\mu\theta}$$

όπου $r_1 = \frac{\upsilon_K}{\omega}$

$$\upsilon_M = \sqrt{\upsilon_K{}^2 + \upsilon_K{}^2\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + 2\upsilon_K{}^2 \cdot \frac{r}{r_1} \cdot \eta\mu\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_M = \upsilon_K\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{r}{r_1} \cdot \eta\mu\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_M = \upsilon_K\sqrt{\frac{r_1{}^2 + r^2 + 2 \cdot r_1 \cdot r \cdot \eta\mu\theta}{r_1{}^2}}$$

Η συνθήκη $\upsilon_M = 0$ δίνει:

$$r_1{}^2 + r^2 + 2 \cdot r_1 \cdot r \cdot \eta\mu\theta = 0 \Rightarrow r^2 + 2 \cdot r_1 \cdot \eta\mu\theta \cdot r + r_1{}^2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτεροβάθμια ως προς $r$ και έχει οπωσδήποτε λύση. Άρα πρέπει:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (2 \cdot r_1 \cdot \eta\mu\theta)^2 - 4 \cdot r_1{}^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \cdot r_1{}^2 \cdot (\eta\mu^2\theta - 1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu^2\theta - 1 \geq 0 \Rightarrow \eta\mu^2\theta \geq 1 \Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 \Rightarrow \eta\mu\theta = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Για τη μηδενική τιμή της διακρίνουσας έχουμε τη διπλή ρίζα:

$$r = \frac{-2 \cdot r_1 \cdot \eta\mu\theta}{2} \Rightarrow r = -r_1 \cdot \eta\mu\theta$$

Το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει ότι η ρίζα $\theta = \frac{\pi}{2}$ πρέπει να απορριφθεί. Έτσι:

$$r = -r_1 \cdot \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = r_1 \Rightarrow r = \frac{\upsilon_K}{\omega} \Rightarrow r = \frac{4}{2}cm \Rightarrow r = 2cm$$

Αφού $\theta = \frac{3\pi}{2}$ καταλήγουμε ότι το $M$ βρίσκεται στην κατακόρυφο που διέρχεται από το $K$ και χαμηλότερα από αυτό. Άρα, ως προς το κέντρο μάζας $K$, είναι:

$$x_M = 0,\ y_M = -2\ cm$$

Εκτός του ανωτέρω σημείου $M$ υπάρχουν και άλλα με ταχύτητα $0$, τα οποία βρίσκονται κατά μήκος ευθύγραμμου τμήματος που είναι παράλληλο προς τον άξονα συμμετρίας του κυλινδρικού σώματος και περιέχει το $M$.

**2ο ΘΕΜΑ**

**Β.1.** Εφόσον η ροή είναι ιδανική και το ρευστό ασυμπίεστο ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ δύο σημείων που δεν παρεμβάλλεται όμως ο φυσητήρας.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των διατομών 2 και 3 προκύπτει:

$$p_2 + \frac{\rho}{2}\upsilon_2^2 = p_a + \frac{\rho}{2}\upsilon_3^2 \qquad (1)$$

ενώ μεταξύ των διατομών 2 και 4 αντίστοιχα θα είναι:

$$p_2 + \frac{\rho}{2}\upsilon_2^2 = p_a + \frac{\rho}{2}\upsilon_4^2 \qquad (2)$$

και τέλος, μεταξύ του περιβάλλοντος 0 και της διατομής 1 αντίστοιχα θα είναι:

$$p_a = p_1 + \frac{\rho}{2}\upsilon_1^2 \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\upsilon_3 = \upsilon_4 \qquad (4)$$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας (ύλης ή συνέχειας) για ολόκληρο το σύστημα δίνει τη συνολική παροχή ως:

$$\Pi_o = \Pi_3 + \Pi_4 = A_3\upsilon_3 + A_4\upsilon_4 \overset{(4)}{\Rightarrow} \upsilon_3 = \frac{\Pi_o}{A_3 + A_4} \qquad (5)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση συνέχειας μεταξύ των θέσεων (1) και (2) προκύπτει $υ_1=υ_2$, οπότε από τις σχέσεις (1) και (3) μπορεί να σχηματιστεί η διαφορά πίεσης εκατέρωθεν του φυσητήρα ως:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}\upsilon_3^2 \overset{(5)}{\Rightarrow} p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}\frac{\Pi_o^2}{\left(A_3 + A_4\right)^2} \qquad (6)$$

Με αντικατάσταση της (6) στη σχέση της ισχύος προκύπτει:

$$P = \frac{\rho}{2}\frac{\Pi_o^3}{\left(A_3 + A_4\right)^2} \Rightarrow \Pi_o = \sqrt[3]{\frac{2P\left(A_3 + A_4\right)^2}{\rho}} \Rightarrow \Pi_o = 39.15 \text{ m}^3\text{/s}$$

Με αντικατάσταση της $Π_ο$ στην (5) προκύπτει $υ_3=6.52$ m/s $\overset{(4)}{=}$ $υ_4$.

Η κάθε παροχή $Π_3$ και $Π_4$ του θεωρούμενου ασυμπίεστου αέρα στους χώρους (Α) και (Β) αντίστοιχα είναι ίση με το γινόμενο του εμβαδού της διατομής $A_3$ και $A_4$ αντίστοιχα επί την ταχύτητα $υ_3$ και $υ_4$ αντίστοιχα του ρευστού στις αντίστοιχες θέσεις 3 και 4. Δηλαδή:

$$Π_3=A_3\, υ_3 \Rightarrow Π_3 = 26.08 \text{ m}^3\text{/s}$$

και

$$Π_4=A_4\, υ_4 \Rightarrow Π_4 = 13.04 \text{ m}^3\text{/s}$$

**Β.2.** Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (6) επί -1 σχηματίζεται η διαφορά πίεσης $p_1$-$p_2$ η οποία αν αντικατασταθεί στη δοθείσα σχέση της δύναμης θα προκύψει:

$$F=(p_1-p_2)A_1 \Rightarrow F = -\frac{\rho}{2}\upsilon_3^2\, A_1 \Rightarrow F = -25.5 \text{ N}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η φορά της δύναμης από τον ρευστό αέρα στο φυσητήρα είναι αντίθετη της θετικής φοράς του άξονα x του σχήματος.

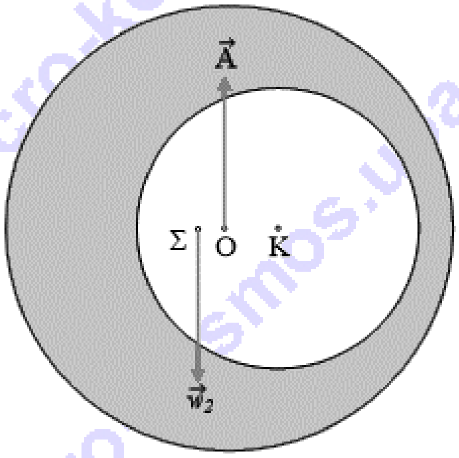
**3ο ΘΕΜΑ**

**Γ.1.** Αφού τα κέντρο μάζας της ομογενούς σφαίρας και του εκτοπιζόμενου νερού συμπίπτουν, το κέντρο άνωσης βρίσκεται στο $O$. Σωστή λοιπόν είναι η πρόταση **ii**.

**Γ.2.1.** Κατά την αφαίρεση της σφαίρας ακτίνας $r$ και κέντρου $K$, δημιουργείται μια μη ομογενής κοίλη σφαίρα. Το κέντρο μάζας της, έστω $\Sigma$, δεν θα συμπίπτει με το σημείο $O$ (αυτό θα συνέβαινε μόνο αν τα σημεία $O$ και $K$ ταυτίζονταν). Αντίθετα, τα σημεία $\Sigma$ και $K$ βρίσκονται εκατέρωθεν του Ο. Με βάση λοιπόν τον προσανατολισμό της (μη ομογενούς) κοίλης σφαίρας που φαίνεται στο σχήμα της εκφώνησης, το κέντρο μάζας της $\Sigma$ βρίσκεται χαμηλότερα από το $O$. Σωστή λοιπόν είναι η πρόταση **v**.

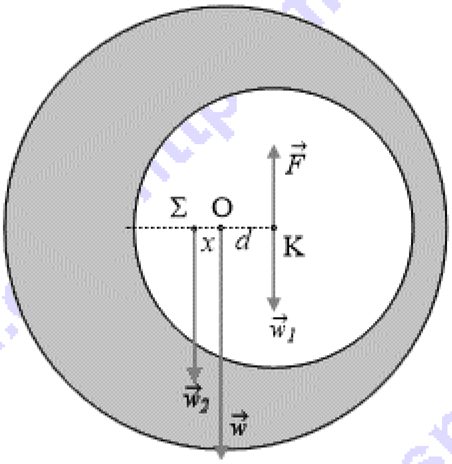
**Γ.2.2.** Αφού ο όγκος του εκτοπιζόμενου νερού δε μεταβάλλεται λόγω της διάνοιξης της εσωτερικής κοιλότητας στη σφαίρα, το κέντρο άνωσης συνεχίζει να βρίσκεται στο $O$. Σωστή λοιπόν είναι η πρόταση **iv**.

**Γ.3.** Όταν το τμήμα $OK$ είναι οριζόντιο, οι θέσεις των σημείων $\Sigma$, $O$ και $K$ είναι αυτές που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.




Όταν αφεθεί μέσα στο νερό, η κοίλη σφαίρα συμπεριφέρεται ως ένα ελεύθερο στερεό, το οποίο, εκτός από το βάρος του, που ασκείται στο $\Sigma$, δέχεται και άνωση με σημείο εφαρμογής το κέντρο άνωσης, δηλαδή το κέντρο $O$ της αρχικής σφαίρας. Η άνωση δημιουργεί ροπή ως προς το κέντρο μάζας $\Sigma$ της κοίλης σφαίρας. Η ροπή αυτή θα την θέσει σε περιστροφική κίνηση ως προς νοητό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το $\Sigma$. Δηλαδή κατά την επακόλουθη κίνηση της κοίλης σφαίρας, το σημείο $\Sigma$ δε μετατοπίζεται.

**Γ.4.** Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, αυτό που μας μας ζητείται είναι ο προσδιορισμός της θέσης του κέντρου μάζας $\Sigma$ της κοίλης σφαίρας, το οποίο θα βρίσκεται στην προέκταση της $OK$, προς την πλευρά του $O$ και σε απόσταση έστω $x$ από αυτό.




Την κοίλη σφαίρα μπορούμε να την προσεγγίσουμε με μια ομογενή σφαίρα στο σημείο $K$ της οποίας ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη $F$, με φορά προς τα πάνω, μέτρου:

$$F = W_1 = M_1 g = \frac{27}{125} Mg \Rightarrow F = \frac{27}{125} W$$

ώστε να εξουδετερώσουμε το βάρος της μάζας που καταλάμβανε την κοιλότητα.

Το βάρος της κοίλης σφαίρας είναι ίσο με:

$$W_2 = W - F$$

με σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας $\Sigma$ της κοίλης σφαίρας. Η ροπή του $W_2$ ως προς το κέντρο μάζας $\Sigma$ είναι μηδενική.

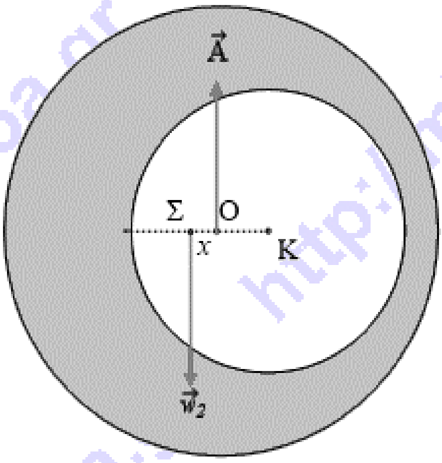
Εφαρμόζοντας το θεώρημα των ροπών έχουμε:

$$\tau_{\Sigma(w_2)} = \tau_{\Sigma(W)} + \tau_{\Sigma(F)} \Rightarrow 0 = -W \cdot x + F(x+d) \Rightarrow W \cdot x = F(x+d) \Rightarrow$$

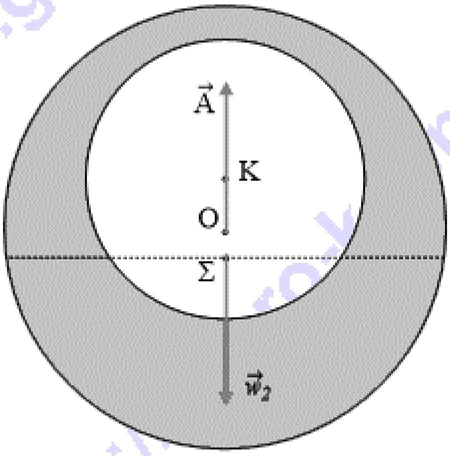
$$\Rightarrow W \cdot x = \frac{27}{125} W(x+d) \Rightarrow 125x = 27x + 27d \Rightarrow 98x = 27d \Rightarrow x = \frac{27}{98} d \Rightarrow x = 2{,}7cm$$

Άρα, το σημείο τομής του άξονα γύρω από τον οποίο θα περιστραφεί η κοίλη σφαίρα με το επίπεδο του σχήματος βρίσκεται αριστερά του $O$ και σε απόσταση $x = 2{,}7cm$ από αυτό. Επομένως οι ζητούμενες συντεταγμένες είναι $x = -2{,}7cm$ και $y = 0$.

**Γ.5.** Μόλις η κοίλη σφαίρα αφεθεί ελεύθερη δέχεται μόνο το βάρος της και την άνωση από το νερό. Οι δυο αυτές δυνάμεις αποτελούν ζεύγος, το οποίο έχει ροπή μέτρου $\tau = W_2 \cdot x$, η οποία θα της προκαλέσει γωνιακή επιτάχυνση τείνοντας να τη στρέψει αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.




Έτσι, ενώ το κέντρο μάζας $\Sigma$ θα παραμείνει ακίνητο (αφού $\Sigma F = 0$), η σφαίρα θα εκτελέσει μια φθίνουσα στροφική ταλάντωση (εξαιτίας της αντίστασης του νερού) και θα ισορροπήσει όπως στο διπλανό σχήμα, όπου το κέντρο μάζας $\Sigma$ θα παραμείνει στην αρχική του θέση, ενώ τα σημεία $O$ και $K$ θα βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο με το $\Sigma$, ώστε το βάρος και η άνωση να έχουν μηδενική ροπή.



Η υψομετρική διαφορά αρχικής και τελικής θέσης του κέντρου $K$ της σφαιρικής κοιλότητας θα είναι ίση με

$$h = x + d \Rightarrow h = 2,7cm + 9,8cm \Rightarrow h = 12,5cm$$

**Γ.6.** Προκειμένου η σφαίρα να παραμένει ολόκληρη βυθισμένη μέσα στο νερό καθ΄ όλη τη διάρκεια της κίνησής της, θα πρέπει το ανώτερο σημείο της να βρίσκεται οριακά χαμηλότερα από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, όταν η κοίλη σφαίρα ακινητοποιείται. Άρα το $O$ πρέπει αρχικά να τοποθετηθεί σε ελάχιστο βάθος ίδιο με αυτό που βρίσκεται το (ακίνητο) $\Sigma$:

$$y_{\min} = R + x \Rightarrow y_{\min} = 0,4m + 0,027m = 0,427m = 42,7cm$$

**Γ.7.** Στη διάρκεια της φθίνουσας στροφικής ταλάντωσης, λόγω της δύναμης αντίστασης από το νερό, ελευθερώνεται θερμική ενέργεια, η οποία θα είναι ίση με την ελάττωση της μηχανικής ενέργειας της κοίλης σφαίρας. Εφόσον το κέντρο μάζας της κοίλης σφαίρας παραμένει στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, η δυναμική βαρυτική ενέργεια της σφαίρας παραμένει ίδια στην αρχική και τελική θέση της σφαίρας. Επειδή όμως το κέντρο άνωσης, δηλαδή το κέντρο $O$ της αρχικής ομογενούς σφαίρας ανυψώθηκε κατά $x = 2,7\ cm$, η άνωση στη διάρκεια της κίνησης παρήγαγε έργο. Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι η άνωση είναι διατηρητική δύναμη, συνεπώς το έργο της είναι ανεξάρτητο της τροχιάς και ίσο με:

$$W_A = A \cdot x = M_2 g \cdot x = \frac{98}{125} Mg \cdot x \Rightarrow W_A = \frac{98}{125} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,4^3\right) \cdot \frac{125}{98} \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 2,7 \cdot 10^{-2}\ J \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W_A = 72,35J$$

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας, στην αρχική και τελική της θέση είναι μηδενική.

Άρα η θερμική ενέργεια που ελευθερώνεται είναι ίση με $Q = 72,35\ J$.