ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2018 - Γ΄ Τάξη

Β΄ Φάση 14/04/2018

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Οι απαντήσεις σε *όλα* τα ερωτήματα θα πρέπει να αναγραφούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που ακολουθεί μετά το τέλος των εκφωνήσεων.
2. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε φύλλα Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί. Τα υλικά αυτά θα παραδοθούν στο τέλος της εξέτασης μαζί με το ***Φύλλο Απαντήσεων***.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1^{Ο} ΘΕΜΑ

Α.1. Δύο υλικά σημεία $Σ_1$ και $Σ_2$ μάζας m και φορτίου q βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο σε ύψη h_1 και h_2 ($h_2>h_1$) από το έδαφος και εκτοξεύονται ταυτόχρονα με οριζόντιες ταχύτητες μέτρου υ προς την ίδια κατεύθυνση. Το υλικό σημείο $Σ_1$, που ξεκίνησε από χαμηλότερο ύψος, χτυπά για πρώτη φορά στο έδαφος, τη στιγμή t_1 σε σημείο που βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση $x_1=L$ από το σημείο εκτόξευσής του.

Α.1.1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του $Σ_2$ (x_2, y_2) τη στιγμή t_1.

Α.1.2. Για ποιες τιμές της απόστασης L το $Σ_2$ βρίσκεται τη στιγμή t_1 σε ύψος μεγαλύτερο από το ύψος εκτόξευσής του;

Α.1.3. Υποθέστε τώρα ότι τα $Σ_1$ και $Σ_2$ τοποθετούνται εκ νέου στην ίδια κατακόρυφο και σε ύψη πάλι h_1 και h_2 ($h_2>h_1$) από το έδαφος, με τη διαφορά ότι τώρα φορτίζονται με αντίθετα φορτία q και -q αντίστοιχα. Να βρείτε τις ταχύτητες εκτόξευσής τους ώστε κατά την κίνησή τους η μεταξύ τους απόσταση να μη μεταβάλλεται.

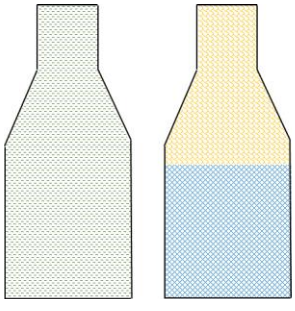
Σε όλα τα μέρη της άσκησης να αμελήσετε την αντίσταση του αέρα, το φορτίο που τα $Σ_1$, $Σ_2$ επάγουν στο έδαφος και τις μαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η σταθερά $K_{ηλ}$.

Α.2. Ποσότητα ιδανικού μονοατομικού αερίου βρίσκεται σε κατάσταση Α που χαρακτηρίζεται από πίεση P_o και όγκο V_o. Μετά μεταβαίνει σε κατάσταση Β που χαρακτηρίζεται από όγκο $\frac{7}{4}V_o$ και πίεση $\frac{1}{4}P_o$ εκτελώντας μεταβολή η οποία στο διάγραμμα P–V απεικονίζεται με ευθύγραμμο τμήμα. Στη συνέχεια υπόκειται σε ισοβαρή μεταβολή και μεταβαίνει σε κατάσταση Γ με όγκο V_o. Τέλος επιστρέφει στην κατάσταση Α με ισόχωρη μεταβολή. Έτσι ολοκληρώνεται ένας αντιστρεπτός κύκλος. Θεωρώντας γνωστές τις ποσότητες P_o και V_o, υπολογίστε:

Α.2.1. τη συνολική θερμότητα Q_h που απορρόφησε το αέριο από το περιβάλλον του και τη συνολική θερμότητα Q_c που απέβαλε το αέριο στο περιβάλλον του.

Α.2.2. το συντελεστή απόδοσης e μιας μηχανής που εκτελεί την κυκλική μεταβολή Α → Β → Γ → Α.

2^{Ο} ΘΕΜΑ

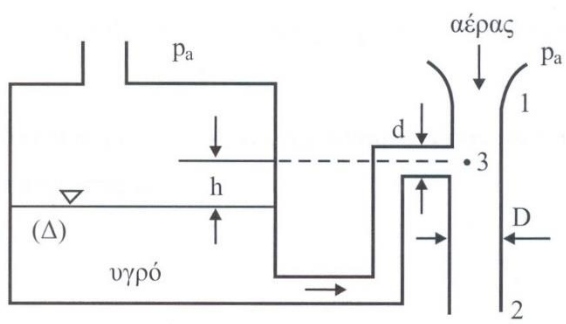


Β.1. Ένα δοχείο όπως αυτό του αριστερού σχήματος περιέχει ομοιόμορφο μείγμα (ή κολλοειδές διάλυμα) δύο υγρών (σε αναλογία όγκων 1:1), που δεν διαλύονται το ένα μέσα στο άλλο, αφού έχουν διαφορετικές πυκνότητες (π.χ. νερό και λάδι). Με το πέρασμα του χρόνου το υγρό μεγαλύτερης πυκνότητας καθιζάνει στη βάση του δοχείου, ενώ το αραιότερο συγκεντρώνεται πάνω από το πρώτο (δεξί σχήμα). Ποια σχέση συνδέει την αρχική πίεση P_A στον πυθμένα του δοχείου (πριν τον διαχωρισμό των υγρών) με την τελική πίεση P_T (μετά τον διαχωρισμό τους):

α) $P_A = P_T$, β) $P_A < P_T$, γ) $P_A > P_T$

Στο Φύλλο Απαντήσεων να σημειώσετε με **x** την επιλογή σας και να την αιτιολογήσετε.

Β.2. Στο σχήμα παρουσιάζεται ένας απλός εξαεριωτής μέσω του οποίου δια μέσου ενός στομίου αναρροφάται αέρας από το περιβάλλον πίεσης p_a, πυκνότητας ρ_α=1,2 Kg/m^3 και παροχής Π_α=6π l/s (με π το λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρο ενός κύκλου). Στο ευθύγραμμο τμήμα κυλινδρικού αγωγού αναρρόφησης του αέρα 1-2 με διάμετρο D=2 cm συμβάλλει κυλινδρικός σωλήνας διαμέτρου d=0,5 mm που επικοινωνεί με δοχείο (Δ) στο οποίο υπάρχει υγρό πυκνότητας ρ_υ=800 Kg/m^3. Όταν το ύψος h της συμβολής μετρημένο από την ελεύθερη στάθμη του υγρού του δοχείου (Δ) δεν ξεπερνάει ένα συγκεκριμένο μέγιστο ύψος h_{max}, τότε αναρροφάται υγρό από το δοχείο που αναμειγνύεται με τον αέρα στο σημείο 3. Αν οι ροές θεωρηθούν ιδανικές (αστρόβιλες, ασυμπίεστων μη συνεκτικών ρευστών) και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g= 9,81 m/s^2 τότε:



Β.2.1. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του αέρα $\upsilon_{3\alpha}$ στο σημείο 3.

Β.2.2. Να υπολογιστεί το μέγιστο ύψος h_{max} της συμβολής.

Β.2.3. Να υπολογιστεί η παροχή όγκου Π_υ του υγρού σε ml/min που αναρροφάται από τον αέρα εάν το ύψος της συμβολής είναι $h = 0{,}1\ m$.

3^{Ο} ΘΕΜΑ

Θέλοντας να βιώσει (αισθητοποιήσει) τη διατήρηση της στροφορμής, μια μαθήτρια κάθεται σε σκαμνί που μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα περί τον κατακόρυφο άξονά του και κρατάει στα χέρια της δύο αλτήρες (βαρίδια). Έχοντας τα χέρια μαζεμένα κοντά στο σώμα της, ζητά από ένα συμμαθητή της να τη θέσει σε περιστροφική κίνηση, και, ακολούθως, να πατήσει το κουμπί έναρξης λειτουργίας ενός μετρονόμου. Τα δύο παιδιά παρατηρούν ότι ακούγονται τέσσερις κτύποι του μετρονόμου ανά περιστροφή. Ακολούθως η μαθήτρια απλώνει τα χέρια της σε έκταση οπότε ακούγονται πέντε κτύποι του μετρονόμου ανά περιστροφή.

Γ.1. Να βρείτε το ποσοστό, έστω κ, αύξησης της ροπής αδράνειας του συστήματος μαθήτρια-αλτήρες, εξ αιτίας της έκτασης των χεριών της.

Στη συνέχεια η μαθήτρια αφήνει τους αλτήρες και πιάνει ένα τροχό ποδηλάτου με δύο χειρολαβές, διατηρώντας τον άξονα συμμετρίας του τροχού οριζόντιο. Ο συμμαθητής της φέρνει για αρκετή ώρα σε επαφή με την περιφέρεια του τροχού έναν ηλεκτρικό κινητήρα σε λειτουργία ώστε ο τροχός να αρχίσει να περιστρέφεται (με μεγάλη συχνότητα) κατά τρόπο ώστε το ανώτερο σημείο του να έχει ταχύτητα με φορά προς τη μαθήτρια. Στη συνέχεια εκείνη ασκεί μία προς τα κάτω δύναμη στη χειρολαβή που κρατά με το αριστερό της χέρι και μία πρακτικά ίση προς τα πάνω δύναμη με το δεξί της χέρι, περιμένοντας να νιώσει μια δυσανάλογα μεγάλη δυσκολία στην προσπάθειά της να περιστρέψει το επίπεδο του τροχού. Προς μεγάλη της έκπληξη όμως, εκτός από την αναμενόμενη δυσκολία, αισθάνεται το κάθισμά της να περιστρέφεται όσο διαρκεί η προσπάθειά της να περιστρέψει τον τροχό.

Γ.2. Με σημείο θέασης από την οροφή, η μαθήτρια θα περιστρέφεται α) όπως οι δείκτες του ρολογιού ή β) αντίστροφα; Σημειώστε με **x** την επιλογή σας στο Φύλλο Απαντήσεων.

Για να σιγουρευτεί για την αίσθηση που ένιωσε, η μαθήτρια ζητά από το συμμαθητή της να επιβραδύνει σταδιακά τον τροχό μέχρι την πλήρη ακινητοποίησή του. Σηκώνεται από το σκαμνί στερεώνει τα πόδια της στο πάτωμα και τα δύο παιδιά επαναλαμβάνουν το πείραμα. Η μαθήτρια διαπιστώνει ότι καθώς ασκεί τις ίδιες όπως προηγουμένως δυνάμεις, το επίπεδο του τροχού (από τη δική της οπτική γωνία) δεν περιστρέφεται αντίστροφα από τους δείκτες του ρολογιού, αλλά το τμήμα του άξονα που κρατά με το δεξί της χέρι, τείνει να κινηθεί προς το μέρος της, ενώ το τμήμα που κρατά με το αριστερό, τείνει να απομακρυνθεί από το σώμα της.

Γ.3. Στο σχήμα που θα βρείτε στο Φύλλο Απαντήσεων να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που πρέπει να ασκήσει η μαθήτρια με τα δυο της χέρια, ώστε το επίπεδο του τροχού να περιστραφεί (από τη δική της οπτική γωνία) αντίστροφα από τους δείκτες του ρολογιού.

Έχοντας, μέσω του πειραματισμού, ξεκαθαρίσει τη σχετική φυσική στο μυαλό της, ως πρόσθετη επιβεβαίωση αναρτά τη μία χειρολαβή του τροχού από το άκρο σχοινιού που κρέμεται από την οροφή, ενώ κρατά την άλλη χειρολαβή έτσι ώστε ο άξονας του τροχού να είναι οριζόντιος. Με τη βοήθεια του κινητήρα θέτει τον τροχό σε περιστροφή με συχνότητα $f_{\tau\rho}$. Αφήνει ελεύθερο τον τροχό, οπότε το επίπεδό του παραμένει πρακτικά κατακόρυφο, αρχίζοντας να περιφέρεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο ανάρτησης.

Ο συμμαθητής της εκπλήσσεται επειδή περίμενε να δει το επίπεδο του τροχού να γίνεται οριζόντιο μόλις η μαθήτρια άφηνε τη χειρολαβή.

Γ.4. Στο σχήμα που θα βρείτε στο φύλλο απαντήσεων να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που διατηρούν το επίπεδο του τροχού κατακόρυφο.

Γ.5. Στο σχήμα που θα βρείτε στο φύλλο απαντήσεων να σχεδιάσετε τις ροπές που είναι υπεύθυνες για την περιφορά του επιπέδου του τροχού.

Γ.6. Να υπολογίσετε τη συχνότητα περιφοράς του επιπέδου του τροχού γύρω από το σημείο ανάρτησης.

Δίνονται: ακτίνα τροχού $R = 80\,cm$, άξονας τροχού $(ΑΓ) = 40\,cm$, $f_{τρ} = 200\,Hz$, $g = 10\,m/s^2$, $\pi^2 \cong 10$.

Να λάβετε υπ΄ όψη σας ότι το μήκος τόξου ds στο οποίο βαίνουν στοιχειώδεις επίκεντρες γωνίες $d\theta$ είναι περίπου ίσο με την αντίστοιχη χορδή και να θεωρήσετε πως όλη η μάζα του τροχού είναι πρακτικά συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.

Καλή Επιτυχία

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Όνομα και Επώνυμο: ……………………………………………………………
Όνομα Πατέρα: …………………….. Όνομα Μητέρας: …………………..
Τηλ. Οικίας: ………………….. Κινητό τηλέφωνο: ……………………..….
e-mail: ……………………..………………………………………

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1.1. $x_2 =$………….. $y_2 =$………….. **Α.1.2.** L ……………………………………..

Α.1.3. $\vec{\upsilon}_1 =$…………………… $\vec{\upsilon}_2 =$……………………

Α.2.1. $Q_h =$………….. $Q_c =$………….. **Α.2.2.** $e =$…………..

ΘΕΜΑ 2ο

Β.1. α) $P_A = P_T$ ☐ β) $P_A < P_T$ ☐ γ) $P_A > P_T$ ☐

Αιτιολόγηση:

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

Β.2.1. $\upsilon_{3\alpha} =$………….. **Β.2.2.** $h_{max} =$………….. **Β.2.3.** $\Pi_{\upsilon} =$…………..

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

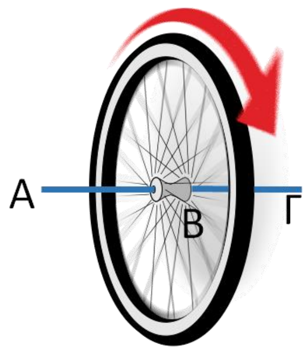
Γ.1. $\kappa =$ ………………….

Γ.2. Με σημείο θέασης από την οροφή, η μαθήτρια θα περιστρέφεται

α) όπως οι δείκτες του ρολογιού	
β) αντίστροφα από τους δείκτες του ρολογιού	

Γ.3.

Γ.4. και **Γ.5.**



Γ.6. $f_{\pi\varepsilon\rho} =$…………………………..

Συνοπτικές Απαντήσεις

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1^{Ο} ΘΕΜΑ

Α.1.

Α.1.1. Αν θεωρήσουμε τα δύο υλικά σημεία ως ένα σύστημα σωμάτων, η ηλεκτρική αλληλεπίδραση μεταξύ τους είναι εσωτερική δύναμη, συνεπώς δεν επηρεάζει την κίνηση του κέντρου μάζας (CM) τους. Άρα η μόνη δύναμη που επιδρά στο σύστημα είναι η βαρυτική. Λόγω της ισότητας των μαζών, το αρχικό ύψος του CM είναι $(h_1+h_2)/2$ και εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα υ. Θεωρώντας το σημείο μηδέν του κατακόρυφου άξονα στο επίπεδο του εδάφους και ως θετική τη φορά προς τα πάνω, η εξίσωση της τροχιάς του CM είναι:

$$y = \frac{h_1 + h_2}{2} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{\upsilon}\right)^2$$

Η κοινή αρχική ταχύτητα των Σ_1 και Σ_2 εξασφαλίζει ότι αυτά και το CM βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο κάθε στιγμή. Άρα το Σ_2 βρίσκεται επίσης σε θέση με

$$x_2 = L$$

Εξ άλλου, για $x = L$ το CM βρίσκεται σε ύψος:

$$y_o = \frac{h_1 + h_2}{2} - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{\upsilon}\right)^2$$

Οπότε

$$y_2 = 2y_o = h_1 + h_2 - g \left(\frac{L}{\upsilon}\right)^2$$

Α.1.2. Θέλουμε $y_2 > h_2$. Από το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει:

$$h_1 + h_2 - g\left(\frac{L}{\upsilon}\right)^2 > h_2 \Rightarrow h_1 - g\left(\frac{L}{\upsilon}\right)^2 > 0 \Rightarrow h_1 > g\left(\frac{L}{\upsilon}\right)^2 \Rightarrow L < \sqrt{\frac{h_1}{g}}\upsilon$$

Η φυσική σημασία του αποτελέσματος αυτού είναι πως όσο μικρότερο είναι το L, τόσο μικρότερος είναι και ο χρόνος κίνησης του Σ_1 μέχρι να φτάσει στο έδαφος. Αν δεν υπήρχε η ηλεκτρική αλληλεπίδραση με το Σ_2, θα ίσχυε:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

Η ύπαρξη της $F_{ηλ}$ όμως, δημιουργεί μια πρόσθετη (διαρκώς μειούμενη) επιτάχυνση προς τα κάτω η οποία δίνει στο t_1 τιμή μικρότερη από $\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. Όσο πιο μικρή είναι η τιμή του t_1, τόσο μεγαλύτερες είναι οι (επίσης διαρκώς μειούμενες) τιμές της $F_{ηλ}$, άρα τόσο πιθανότερο είναι να εξουδετερώσουν το βάρος του Σ_2 και να το οδηγήσουν σε ύψος μεγαλύτερο του h_2.

Α.1.3. Αν δεν υπήρχε η βαρυτική αλληλεπίδραση, για να μην αλλάζει η απόσταση μεταξύ των Σ_1 και Σ_2 θα έπρεπε αυτά να περιστρέφονται γύρω από το CM (που, λόγω της ισότητας των μαζών, συμπίπτει με το μέσο της απόστασής τους). Αν συμβολίσουμε με $\Delta h = h_2 - h_1$ την απόσταση αυτή, η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς θα είναι $R = \Delta h/2$. Συνεπώς θα πρέπει να τους δώσουμε αντίθετες ταχύτητες με μέτρο κατάλληλο ώστε η (ελκτική πλέον) ηλεκτρική αλληλεπίδρασή τους να παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης για τις τροχιές αυτές. Δηλ.:

$$F_{\eta\lambda} = F_\kappa \Rightarrow K_{\eta\lambda}\frac{|q^2|}{\Delta h^2} = \frac{m\upsilon^2}{\Delta h/2} \Rightarrow K_{\eta\lambda}\frac{|q^2|}{\Delta h} = 2m\upsilon^2$$

$$\Rightarrow \upsilon = |q|\sqrt{\frac{K_{\eta\lambda}}{2m\Delta h}}$$

και

$$\vec{\upsilon}_1 = -\vec{\upsilon}_2$$

Αν τώρα συνυπολογίσουμε τη βαρύτητα, το προηγούμενο αποτέλεσμα δε θα αλλάξει. Απλώς το CM του περιστρεφόμενου συστήματος θα πέφτει ελεύθερα.

Α.2.

__Παρατήρηση__: Η θερμότητα που συνδέεται με «γνωστές» μεταβολές (ισόχωρη, ισοβαρής, ισόθερμη, αδιαβατική) είναι θετική (απορροφάται από το αέριο) ή αρνητική (αποβάλλεται από το αέριο) σε όλη τη διάρκεια των συγκεκριμένων μεταβολών. Αυτό, όμως, δεν ισχύει για τυχαία μεταβολή. Θα πρέπει να εξεταστεί αν κάθε απειροστό τμήμα της παρουσιάζει δQ >0 ή <0.

Α.2.1. Η μεταβολή Α→Β περιγράφεται από τη σχέση: $P = -\frac{P_0}{V_0}V + 2P_0$ (1). Υπολογίζουμε τη συνολική θερμότητα κατά τη μεταβολή από το Α μέχρι ένα τυχαίο σημείο που χαρακτηρίζεται από όγκο $V = xV_0$ και πίεση που δίνεται από την (1): $P = (2-x)P_0$. Η αντίστοιχη θερμότητα κατά τη μεταβολή αυτή είναι:

$$Q_x = \Delta U_x + W_x = \frac{3}{2}\left(P_\Delta V_\Delta - P_A V_A\right) + \frac{1}{2}\left(P_\Delta + P_A\right)\left(V_\Delta - V_A\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left[(2-x)x - 1\right]P_0V_0 + \frac{1}{2}(2-x+1)(x-1)P_0V_0 = \left[(2-x)3x - 3 + (3-x)(x-1)\right]\frac{P_0V_0}{2} =$$

$$= \left(6x - 3x^2 - 3 + 3x - 3 - x^2 + x\right)\frac{P_0V_0}{2} = \left(-4x^2 + 10x - 6\right)\frac{P_0V_0}{2} = \boxed{\left(-2x^2 + 5x - 3\right)P_0V_0} \ (2).$$

Θα διερευνήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης Q_x. Η παράγωγος της Q_x ως προς x είναι:

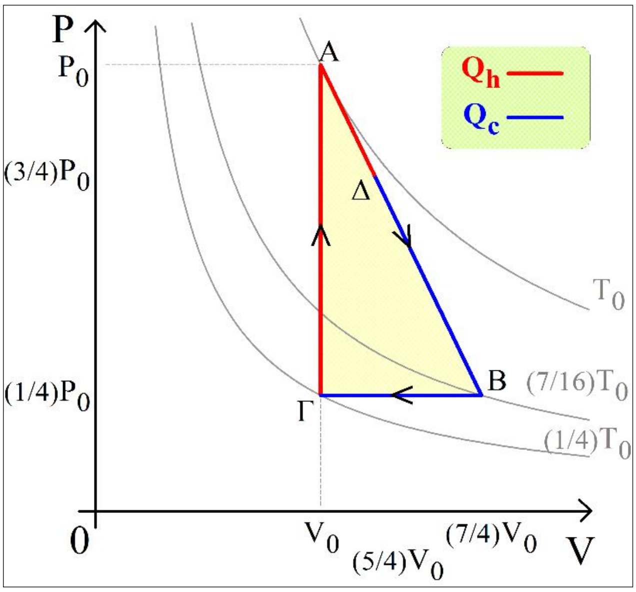
$$Q_x{}' = \left(-4x + 5\right)P_0V_0. \ (3)$$

Η Q_x παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο Δ, όπου $Q_x{}' = 0 \Rightarrow -4x_\Delta + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x_\Delta = \frac{5}{4}}$, δηλαδή σε όγκο $V_\Delta = \frac{5}{4}V_0$. Για όγκους $V < V_\Delta$ η συνάρτηση Q_x είναι γνήσια αύξουσα. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε απειροστή μεταβολή που συμβαίνει γύρω από έναν όγκο V σε τυχαίο σημείο πάνω στη μεταβολή Α→Δ προστίθεται στη συνολική θερμότητα Q_x (που είναι η συνολική θερμότητα από το Α ως το τυχαίο σημείο) ποσό θερμότητας δQ>0. Για όγκους $V > V_\Delta$ η συνάρτηση Q_x είναι γνήσια φθίνουσα. Με αντίστοιχους συλλογισμούς φθάνουμε στο συμπέρασμα ότι σε αυτήν την περιοχή προστίθενται στη συνολική θερμότητα Q_x απειροστά ποσά θερμότητας δQ<0. Συνεπώς η συνολική θερμότητα της μεταβολής Α→Β αποτελείται από ένα καθαρό ποσό θερμότητας θετικό $Q_{ΑΔ}$>0 και ένα καθαρό ποσό θερμότητας αρνητικό $Q_{ΔΒ}$<0. Θα υπολογίσουμε τα ποσά αυτά θερμότητας.

Από την (2) έχουμε: $Q_{\mathrm{A\Delta}} = Q_{x=5/4} = \left(-2\dfrac{25}{16}+5\dfrac{5}{4}-3\right)P_0V_0 = \left(-\dfrac{25}{8}+\dfrac{50}{8}-\dfrac{24}{8}\right)P_0V_0 = \dfrac{1}{8}P_0V_0$.

Επίσης: $Q_{\Delta\mathrm{B}} = Q_{\mathrm{AB}} - Q_{\mathrm{A\Delta}} = Q_{x=7/4} - Q_{\mathrm{A\Delta}} = \left(-2\dfrac{49}{16}+5\dfrac{7}{4}-3\right)P_0V_0 - \dfrac{1}{8}P_0V_0 =$

$= \left(-\dfrac{49}{8}+\dfrac{70}{8}-\dfrac{24}{8}-\dfrac{1}{8}\right)P_0V_0 = \dfrac{4}{8}P_0V_0$.



Η συνολική μεταβολή Α→Β αποτελείται από απειροστές μεταβολές που αντιστοιχούν σε απειροστές μεταβολές εσωτερικής ενέργειας dU<0 και απειροστά έργα δW>0. Ο «ανταγωνισμός» αυτός παράγει απειροστά ποσά θερμότητας δQ που είναι θετικά στο τμήμα Α→Δ και αρνητικά στο τμήμα Δ→Β.

Τα ποσά θερμότητας στην ισοβαρή και ισόχωρη μεταβολή υπολογίζονται με το συνήθη τρόπο. Έτσι:

$$Q_{\mathrm{B\Gamma}} = \Delta U_{\mathrm{B\Gamma}} + W_{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{3}{2}\left(P_\Gamma V_\Gamma - P_B V_B\right) + P_B\left(V_\Gamma - V_B\right) = \frac{3}{2}P_B\left(V_\Gamma - V_B\right) + P_B\left(V_\Gamma - V_B\right) = \frac{5}{2}P_B\left(V_\Gamma - V_B\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{1}{4}P_0\left(V_0 - \frac{7}{4}V_0\right) = \frac{5}{8}P_0\left(-\frac{3}{4}V_0\right) = -\frac{15}{32}P_0V_0 < 0.$$

$$Q_{\Gamma\mathrm{A}} = \Delta U_{\Gamma\mathrm{A}} + W_{\Gamma\mathrm{A}} = \frac{3}{2}\left(P_A V_A - P_\Gamma V_\Gamma\right) + 0 = \frac{3}{2}\left(P_A - P_\Gamma\right)V_A = \frac{3}{2}\left(P_0 - \frac{1}{4}P_0\right)V_0 = \frac{3}{2}\frac{3}{4}P_0V_0 = \frac{9}{8}P_0V_0 > 0$$

.

Η συνολική θερμότητα που απορρόφησε το αέριο είναι:

$$Q_h = Q_{\mathrm{A\Delta}} + Q_{\Gamma\mathrm{A}} = \frac{1}{8}P_0V_0 + \frac{9}{8}P_0V_0 = \frac{10}{8}P_0V_0 = \frac{40}{32}P_0V_0.$$

Η συνολική θερμότητα που απέβαλε το αέριο είναι:

$$Q_c = Q_{\Delta B} + Q_{B\Gamma} = -\frac{4}{8}P_0V_0 - \frac{15}{32}P_0V_0 = -\frac{16+15}{32}P_0V_0 = -\frac{31}{32}P_0V_0 .$$

Α.2.2. Ο συντελεστής απόδοσης του κύκλου είναι:

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} = 1 - \frac{\frac{31}{32}P_0V_0}{\frac{40}{32}P_0V_0} = 1 - \frac{31}{40} = \boxed{\frac{9}{40}}$$

Λανθασμένη Λύση: Είναι λάθος να υπολογιστεί συνολικά η θερμότητα Q_{AB}, προκειμένου να βρεθεί το πρόσημό της. Ένας τέτοιος υπολογισμός οδηγεί σε:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = \frac{3}{2}(P_BV_B - P_AV_A) + \frac{P_A + P_B}{2}(V_B - V_A) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}P_0\frac{7}{4}V_0 - P_0V_0\right) + \frac{1}{2}\left(P_0 + \frac{1}{4}P_0\right)\left(\frac{7}{4}V_0 - V_0\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{7}{16} - 1\right)P_0V_0 + \frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{3}{4}P_0V_0 = \left[\frac{3}{2}\left(-\frac{9}{16}\right) + \frac{15}{32}\right]P_0V_0 = \frac{-27+15}{32}P_0V_0 = -\frac{12}{32}P_0V_0 = -\frac{3}{8}P_0V_0 < 0 .$$

Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε (λανθασμένα):

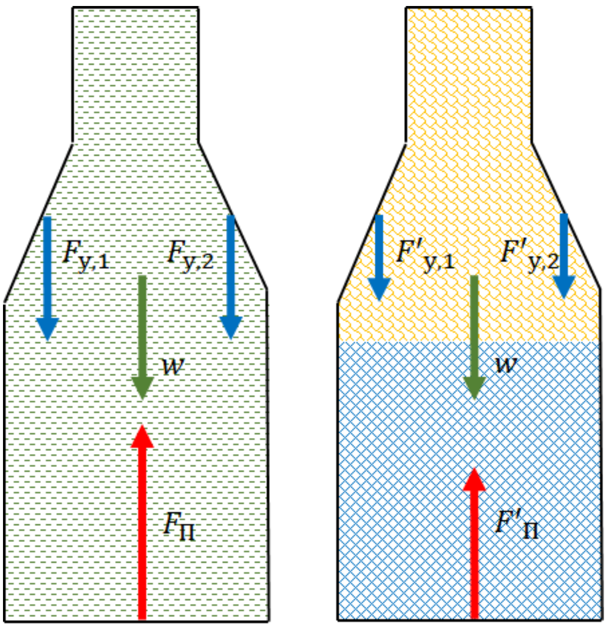
$$Q_h = Q_{\Gamma A} = \frac{9}{8}P_0V_0 = \frac{36}{32}P_0V_0 .$$

$$Q_c = Q_{AB} + Q_{B\Gamma} = -\frac{3}{8}P_0V_0 - \frac{15}{32}P_0V_0 = -\frac{12+15}{32}P_0V_0 = -\frac{27}{32}P_0V_0 .$$

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} = 1 - \frac{\frac{27}{32}P_0V_0}{\frac{36}{32}P_0V_0} = 1 - \frac{27}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{10}{40} .$$

2[ο] ΘΕΜΑ

Β.1. Επειδή σε κάθε σημείο η πίεση του ρευστού είναι ίδια προς κάθε κατεύθυνση, το ρευστό ασκεί δύναμη κάθετη στα τοιχώματα και τα τοιχώματα ασκούν αντίθετη δύναμη στο ρευστό (δράση-αντίδραση). Τα κεκλιμένα τοιχώματα ασκούν δύναμη στο ρευστό με κατακόρυφη συνιστώσα $F_{y,o\lambda} = F_{y,1} + F_{y,2}$.



Για τις δυνάμεις που δέχεται το ρευστό από τα τοιχώματα $F_{y,o\lambda}$, από τον πυθμένα F_Π και από τη γη W ισχύει:

$$W + F_{y,o\lambda} = F_\Pi$$

Το ρευστό ασκεί στον πυθμένα κάθε στιγμή δύναμη ίσου μέτρου με την F_{Π} (δράση-αντίδραση). Συνεπώς η πίεση στον πυθμένα είναι $P_{\Pi} = (W + F_{y,o\lambda})/A$, όπου A το εμβαδό του πυθμένα. Μετά την ολοκλήρωση του διαχωρισμού των υγρών η $F_{y,o\lambda}$ έχει τιμή μικρότερη από εκείνη που είχε αρχικά, επειδή το αραιότερο υγρό που συγκεντρώνεται εκεί έχει πυκνότητα μικρότερη εκείνης του μίγματος, άρα η πίεση μειώνεται. Σωστή λοιπόν είναι η απάντηση γ.

Β.2.1. Η παροχή Π_α του θεωρούμενου ασυμπίεστου αέρα στον ευθύγραμμο κυλινδρικό αγωγό στη θέση 3 είναι ίση με το γινόμενο του εμβαδού της διατομής του αγωγού A_α επί την ταχύτητα $\upsilon_{3\alpha}$ του ρευστού στη θέση αυτή. Δηλαδή:

$\Pi_\alpha = A_\alpha\, \upsilon_{3\alpha} \Rightarrow \upsilon_{3\alpha} = \Pi_\alpha/A_\alpha \Rightarrow \upsilon_{3\alpha} = \Pi_\alpha/A_\alpha \Rightarrow \upsilon_{3\alpha} = 4\Pi_\alpha/(\pi D^2) \Rightarrow \upsilon_{3\alpha} = 60$ m/s.

Β.2.2. Ισχύουν παντού οι προϋποθέσεις εφαρμογής της εξίσωσης Bernoulli, οπότε εφαρμόζεται μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας του δοχείου (Δ) και του σημείου 3 για το υγρό, οπότε:

$$p_a = p_3 + \rho_\upsilon g h + \frac{1}{2}\rho_\upsilon \upsilon_{3\upsilon}^2 \qquad (1)$$

Επίσης, εφαρμόζεται η εξίσωση Bernoulli για τον αέρα μεταξύ του στομίου αναρρόφησης και του σημείου 3, οπότε:

$$p_a = p_3 + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_{3\alpha}^2 \qquad (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) μεταξύ τους προκύπτει:

$$\rho_\upsilon g h + \frac{1}{2}\rho_\upsilon \upsilon_{3\upsilon}^2 = \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_{3\alpha}^2 \Rightarrow \rho_\upsilon g h = \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_{3\alpha}^2 - \frac{1}{2}\rho_\upsilon \upsilon_{3\upsilon}^2 \qquad (3)$$

Το μέγιστο ύψος h_{max} στο οποίο οριακά μπορεί να τοποθετηθεί η συμβολή, ώστε να υφίσταται η αναρρόφηση του υγρού είναι όταν το υγρό φθάνει στη θέση 3 οριακά με μηδενική ταχύτητα. Δηλαδή, όταν εξαλείφεται ο δεύτερος όρος του δευτέρου μέλους της σχέσης (3). Επομένως:

$$\rho_\upsilon g h_{max} = \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_{3\alpha}^2 \Rightarrow h_{max} = \frac{1}{2g}\frac{\rho_\alpha}{\rho_\upsilon}\upsilon_{3\alpha}^2 \Rightarrow h_{max} = 0.275\,\mathrm{m}$$

Β.2.3. Η παροχή όγκου Π_υ του υγρού που αναρροφάται από τον αέρα για το συγκεκριμένο ύψος δίνεται από τη σχέση, όπως έγινε για τον αέρα στο ερώτημα 1, ως εξής:

$$\Pi_\upsilon = A_\upsilon\, \upsilon_{3\upsilon} \Rightarrow \Pi_\upsilon = \upsilon_{3\upsilon}\, \pi d^2/4 \qquad (4)$$

όπου η ταχύτητα $\upsilon_{3\upsilon}$ μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης (3) ως εξής:

$$\rho_\upsilon gh = \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_{3\alpha}^2 - \frac{1}{2}\rho_\upsilon \upsilon_{3\upsilon}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho_\upsilon \upsilon_{3\upsilon}^2 = \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_{3\alpha}^2 - \rho_\upsilon gh \Rightarrow \upsilon_{3\upsilon}^2 = \frac{\rho_\alpha}{\rho_\upsilon}\upsilon_{3\alpha}^2 - 2gh \Rightarrow$$

$$\upsilon_{3\upsilon} = \sqrt{\frac{\rho_\alpha}{\rho_\upsilon}\upsilon_{3\alpha}^2 - 2gh} \Rightarrow \upsilon_{3\upsilon} = 1.854\,\mathrm{m/s}$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή της ταχύτητας του υγρού στη σχέση (4) προκύπτει η ζητούμενη παροχή ως: $\Pi_\upsilon = 3.64\times10^{-7}$ m^3/s $=3.64\times10^{-4}$ l/s=21.83 ml/min.

3$^{\text{Ο}}$ ΘΕΜΑ

Γ.1. Ας συμβολίσουμε με f_μ τη συχνότητα του μετρονόμου και με T_1 την περίοδο περιστροφής του συστήματος πριν την έκταση των χεριών της μαθήτριας. Εξ ορισμού ισχύει:

$$\frac{4}{T_1} = f_\mu \Rightarrow 4f_1 = f_\mu$$

ενώ για την περιστροφή μετά:

$$\frac{5}{T_2} = f_\mu \Rightarrow 5f_2 = f_\mu$$

όπου T_2 η περίοδος περιστροφής του συστήματος μετά την έκταση των χεριών της μαθήτριας.

Προκύπτει λοιπόν:

$$4f_1 = 5f_2 \Rightarrow f_2 = \frac{4f_1}{5}$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής έχουμε:

$$I_1 2\pi f_1 = I_2 2\pi f_2 \Rightarrow I_1 f_1 = I_2 f_2 \Rightarrow I_1 f_1 = I_2\frac{4f_1}{5} \Rightarrow I_1 = \frac{4}{5}I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{5}{4}I_1 \Rightarrow I_2 - I_1 = \frac{1}{4}I_1$$

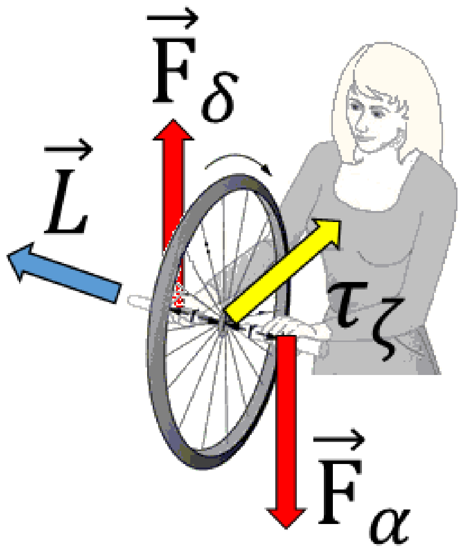
$$\Rightarrow \Delta I = \frac{1}{4}I_1$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό μεταβολής είναι:

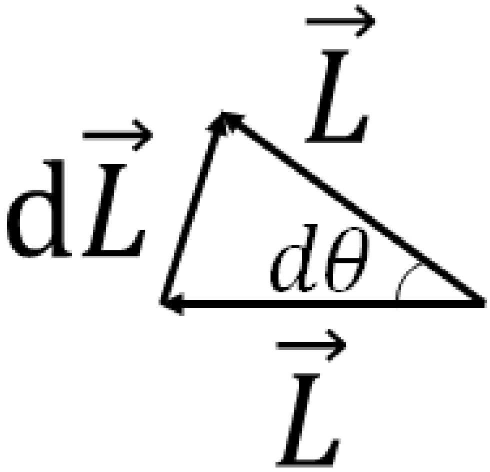
$$\kappa = \frac{\Delta I}{I_1}100\% \Rightarrow \kappa = \frac{\frac{1}{4}I_1}{I_1}100\% \Rightarrow \kappa = \frac{1}{4}100\% \Rightarrow \kappa = 25\%$$

Γ.2. Με σημείο θέασης από την οροφή, η μαθήτρια θα περιστρέφεται όπως οι δείκτες του ρολογιού.

Γ.3. Λόγω της φοράς περιστροφής του τροχού, η στροφορμή του έχει φορά προς το δεξί χέρι της μαθήτριας (βλ. σχ. α΄). Όταν η μαθήτρια ασκεί προς τα κάτω δύναμη έστω $\vec{F}_\alpha$ με το αριστερό της χέρι και προς τα πάνω δύναμη $\vec{F}_\delta$ με το δεξί, ασκεί στον άξονα περιστροφής του τροχού ένα ζεύγος δυνάμεων, η ροπή του οποίου, έστω τ_ζ, κατευθύνεται προς το σώμα της.



Σχήμα α΄

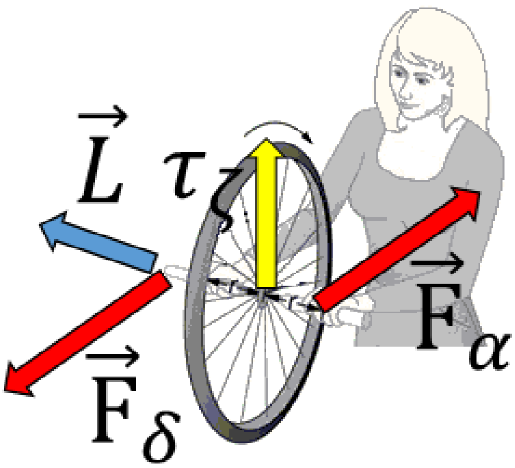


Σχήμα β΄ (κάτοψη)

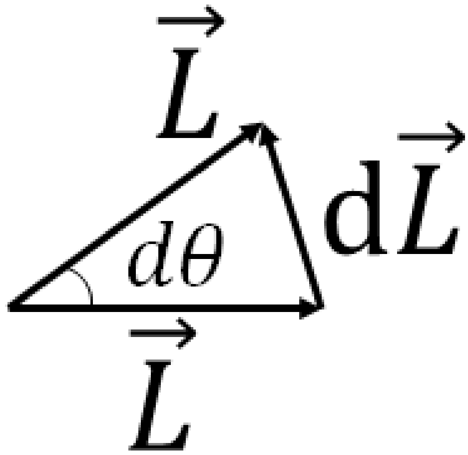
Η ροπή αυτή ισούται με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του τροχού. Άρα, σε κάθε στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt, στην $\vec{L}$ προστίθεται μια $\Delta\vec{L}$ και προκύπτει η νέα στροφορμή του τροχού $\vec{L}$ (βλ. σχ. β΄), που έχει ίδιο μέτρο, αλλά έχει στραφεί κατά γωνία $d\theta$.

Με σημείο θέασης λοιπόν από το ταβάνι, το επίπεδο του τροχού τείνει να περιστραφεί όπως οι δείκτες του ρολογιού.

Αν η μαθήτρια θέλει να περιστρέψει το επίπεδο του τροχού αντίστροφα από τους δείκτες του ρολογιού (από τη δική της οπτική γωνία) θα πρέπει να ασκήσει με το δεξί της χέρι μια δύναμη ώστε να σπρώξει το αντίστοιχο τμήμα του άξονα μακριά από το σώμα της και με το αριστερό μια δύναμη που να τραβά τον άξονα προς το μέρος της (βλ. σχ. γ). Στην περίπτωση αυτή η ροπή του ζεύγους έχει φορά προς τα πάνω, οπότε το διάνυσμα της στροφορμής θα στραφεί κατά τα αναμενόμενα (βλ. σχ. δ) και το ίδιο θα συμβεί και με το επίπεδο του τροχού.

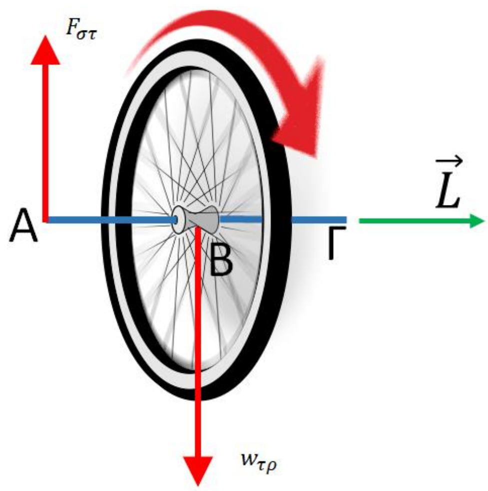


Σχήμα γ΄

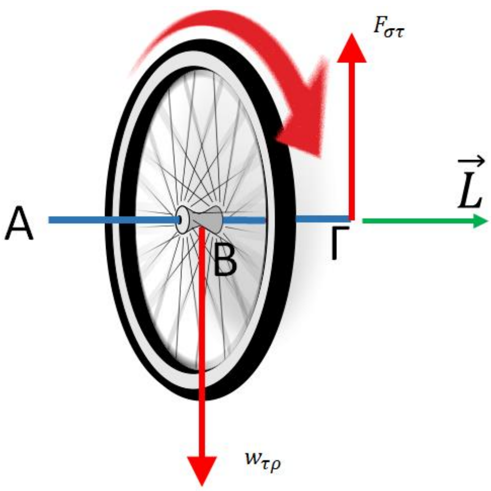


Σχήμα δ΄ (από την οπτική γωνία της μαθήτριας)

Γ.4. Οι δυνάμεις που δέχεται ο τροχός είναι το βάρος του $w_{\tau\rho}$ με σημείο εφαρμογής το κέντρο του, έστω Β, και η δύναμη στήριξης $F_{\sigma\tau}$, που ασκείται στο σημείο ανάρτησης, έστω Α. Αυτές δημιουργούν ένα ζεύγος δυνάμεων που οδηγεί στην ισορροπία του τροχού κατά τη μεταφορική κίνηση, όπως φαίνεται στο πρώτο από τα σχήματα που ακολουθούν. Η περίπτωση ανάρτησης από το άλλο άκρο του άξονα του τροχού, έστω Γ, φαίνεται στο δεύτερο σχήμα.

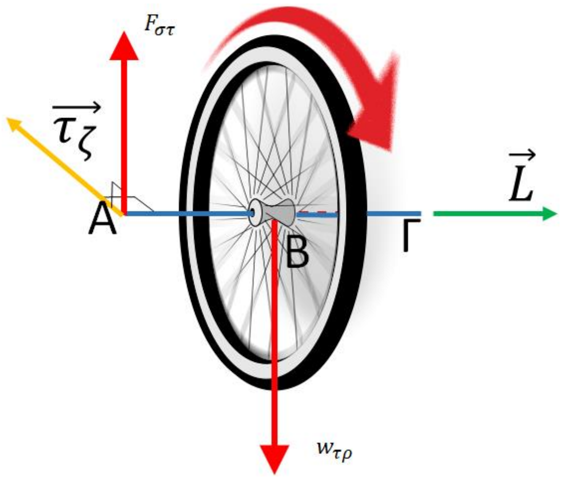


Ανάρτηση από το σημείο Α

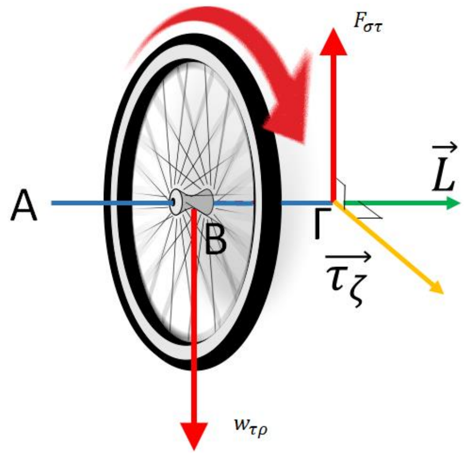


Ανάρτηση από το σημείο Γ

Γ.5. Η μία και μοναδική ροπή που προκαλεί την περιφορά του επιπέδου του τροχού είναι η ροπή του ζεύγους, μέτρου $\tau_\zeta = w_{\tau\rho}(AB) = w_{\tau\rho}(B\Gamma)$ και έχει διεύθυνση παράλληλη προς το επίπεδο του τροχού. Η φορά της εξαρτάται από τη θέση του σημείου ανάρτησης (Α ή Γ) και εικονίζεται στο επόμενο σχήμα:

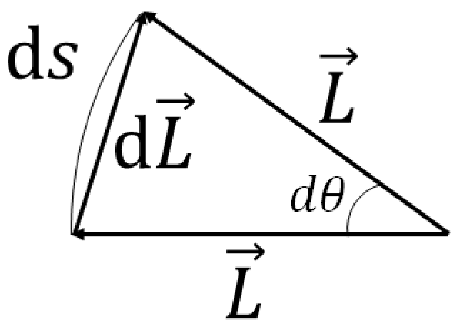


Ανάρτηση από το σημείο Α



Ανάρτηση από το σημείο Γ

Γ.6. Από το σχήμα βλέπουμε ότι για την επίκεντρη γωνία $d\theta$ και το τόξο μήκους ds ισχύει:



$$ds = L d\theta$$

Από την υπόδειξη της εκφώνησης έχουμε ότι:

$$ds \cong dL$$

Άρα:

$$L d\theta = dL \Rightarrow L\frac{d\theta}{dt} = \frac{dL}{dt} \Rightarrow L\omega_{\pi\varepsilon\rho} = \Sigma\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{L}\Sigma\tau$$

$$\Rightarrow 2\pi f_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{I\omega_{\tau\rho}} w\frac{(A\Gamma)}{2} \Rightarrow 2\pi f_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{mR^2 2\pi f_{\tau\rho}} mg\frac{(A\Gamma)}{2} \Rightarrow f_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{g(A\Gamma)}{8\pi^2 R^2 f_{\tau\rho}}$$

$$\Rightarrow f_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{10\cdot 0{,}4}{8\cdot 10(0{,}8)^2 200} Hz$$

$$\Rightarrow f_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2560} Hz \cong 4\cdot 10^{-4}\ Hz$$