



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

2ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Οι απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα θα πρέπει να αναγραφούν στο **Φύλλο Απαντήσεων** που θα σας δοθεί χωριστά από τις εκφωνήσεις.
2. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε φύλλα Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί. Τα υλικά αυτά θα παραδοθούν στο τέλος της εξέτασης μαζί με το **Φύλλο Απαντήσεων**.
3. Τα γραφήματα που ζητούνται στο **Τρίτο Θέμα** και στο **Πειραματικό Μέρος** θα τα σχεδιάσετε στο μιλιμετρέ χαρτί του **Φύλλου Απαντήσεων**.

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ:

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Το αριστερό άκρο γραμμικού ελαστικού μέσου, μεγάλου μήκους, συμπίπτει με την αρχή συστήματος αναφοράς. Στο σχήμα απεικονίζονται 16 από τα (αμελητέων, στην πραγματικότητα, διαστάσεων) μόρια του μέσου αυτού, καθένα από τα οποία απέχει από τα γειτονικά του κατά 10cm. Ένα εξωτερικό αίτιο αναγκάζει το μόριο στη θέση 0 να ταλαντώνεται αρμονικά, κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα, με περίοδο $T = 60,0\text{ms}$. Το εγκάρσιο αρμονικό κύμα, που δημιουργείται στο ελαστικό μέσο, διαδίδεται χωρίς απώλεια ενέργειας, με ταχύτητα $u = 20\text{ m/s}$.

A.1.1. Τα μόρια στα σημεία 8 και 10 έχουν διαφορά φάσης

(α) $\Delta\phi = \frac{\pi}{6}\text{rad}$ (β) $\Delta\phi = \frac{\pi}{3}\text{rad}$ (γ) $\Delta\phi = \frac{2\pi}{3}\text{rad}$

A.1.2. Κάποια χρονική στιγμή το μόριο στο σημείο 15 στερεώνεται κατά τρόπο ώστε να εμποδίζεται η οποιαδήποτε κίνησή του, με αποτέλεσμα στο γραμμικό ελαστικό μέσο να αποκαθίσταται στάσιμο κύμα. Ποια θα είναι η διαφορά φάσης $\Delta\phi$ των μορίων στα σημεία 8 και 10;

A.2. Ένας σωλήνας Σ , εμβαδού διατομής A , που χρησιμοποιείται για άρδευση διακλαδίζεται σε δύο σωλήνες Σ_1 και Σ_2 με εμβαδά διατομών A_1 και A_2 αντίστοιχα. Ο σωλήνας Σ τροφοδοτεί τους σωλήνες Σ_1 και Σ_2 . Η διάταξη βρίσκεται σε οριζόντιο έδαφος. Στο σωλήνα Σ ρέει νερό (που θεωρείται ως ιδανικό ρευστό) με ταχύτητα μέτρου u και η ροή θεωρείται στρωτή. Για τα εμβαδά διατομών A , A_1 και A_2 ισχύει ότι $A = A_1 + A_2$ και $A_1 = \frac{3}{2}A_2$. Συμβολίζουμε με u_1 και u_2 τα μέτρα των ταχυτήτων στους σωλήνες Σ_1 και Σ_2 , αντίστοιχα. Αιτιολογώντας την απάντησή σας να επιλέξετε την έκφραση που περιγράφει τη σχέση των ταχυτήτων.

(α) $\frac{u_1}{u_2} = \frac{2}{3}$ (β) $\frac{u_1}{u_2} = \frac{3}{2}$ (γ) $\frac{u_1}{u_2} = \frac{2}{5}$ (δ) $\frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{1}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Εκ παραδρομής η (ορθή) απάντηση (δ) δεν περιλήφθηκε στα απεσταλμένα θέματα, γι' αυτό, το συγκεκριμένο ερώτημα δεν θα ληφθεί υπόψη κατά τη βαθμολόγηση των γραπτών.



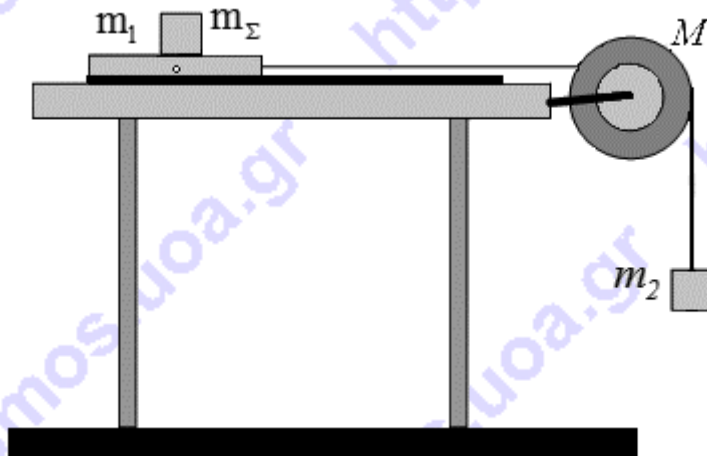
A.3. Να αποδείξετε το θεώρημα του Carnot, σύμφωνα με το οποίο, σε μία πλαστική κρούση δύο σωμάτων m_1 και m_2 η απώλεια της κινητικής ενέργειας είναι ίση, κατά απόλυτη τιμή, με την κινητική ενέργεια που θα είχε το σύστημα των δύο σωμάτων, αν αυτά είχαν ως ταχύτητες τις προκαλούμενες, από την πλαστική κρούση, μεταβολές των αρχικών τους ταχυτήτων, δηλαδή:

$$\Delta K = -\frac{1}{2}m_1(\vec{v} - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{2}m_2(\vec{v} - \vec{v}_2)^2$$

όπου $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων πριν την κρούση και $\vec{v}$ η κοινή ταχύτητα των σωμάτων μετά την κρούση.

ΘΕΜΑ 2^ο

Στην επιφάνεια ενός τραπεζιού έχει στρωθεί λεπτό στρώμα μηχανέλαιου, το οποίο συμπεριφέρεται ως νευτώνειο υγρό. Το μηχανέλαιο έχει πάχος $l = 4\text{mm}$. Μια πλάκα μάζας m_1 σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει εμβαδό βάσης $A = 0,02\text{m}^2$. Η πλάκα ηρεμεί πάνω στο μηχανέλαιο, ενώ πάνω σε αυτή βρίσκεται σώμα Σ μάζας m_Σ . Δένουμε την πλάκα με νήμα, το οποίο περνάμε από μικρή τροχαλία ακτίνας r . Από άλλη τροχαλία, που έχει κοινό άξονα περιστροφής, αποτελεί ενιαίο σώμα με την πρώτη και έχει ακτίνα $R = 2r$, περνάμε δεύτερο νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου δένουμε σώμα μάζας $m_2 = 0,05\text{kg}$ (βλ. σχ.). Κάποια στιγμή αφήνουμε το m_2 να κινηθεί. Οι δύο τροχαλίες έχουν κοινό άξονα περιστροφής και στέφονται χωρίς τριβές. Τα αβαρή και ανελαστικά νήματα κινούνται χωρίς να ολισθαίνουν. Το m_Σ επίσης δεν ολισθαίνει ως προς την πλάκα, καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης.



B.1. Να υπολογίσετε την τελική ταχύτητα v_2 που αποκτά το σώμα μάζας m_2 καθώς και την οριζόντια ταχύτητα ροής v_χ που θα έχουν εκείνα τα σημεία του στρώματος μηχανέλαιου, που βρίσκονται σε κατακόρυφη απόσταση $y = 1,5\text{mm}$ από την επιφάνεια του τραπεζιού.



Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής

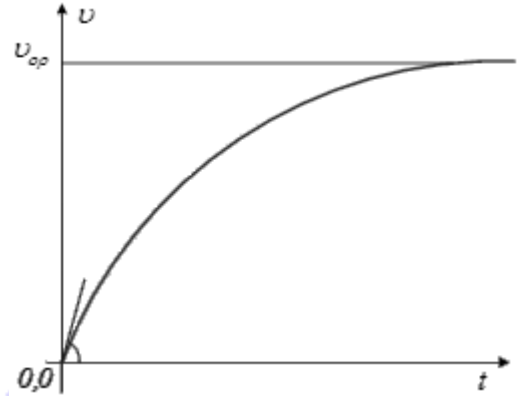


Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

Β.2. Η πλάκα έχει μάζα $m_1 = 0,04 \text{ kg}$ και το σώμα Σ έχει μάζα $m_2 = 0,01 \text{ kg}$. Η ταχύτητα της πλάκας μεταβάλλεται με το χρόνο όπως δείχνει το διπλανό διάγραμμα.



Να υπολογίσετε την κλίση β του διαγράμματος τη χρονική στιγμή $t=0$. Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής τριβής μ_s μεταξύ του Σ και της πλάκας, ώστε το m_2 να μην ολισθαίνει ως προς την πλάκα;

Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της δίνεται από τη σχέση

$$I = \frac{1}{2} m_3 r^2 + \frac{1}{2} m_4 (2r)^2 = r^2 \left(\frac{1}{2} m_3 + 2m_4 \right) \Rightarrow I = Mr^2$$

όπου $M = \frac{1}{2} m_3 + 2m_4 = 0,75 \text{ Kg}$

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι ο συντελεστής ιξώδους του μηχανέλαιου έχει τιμή $n = 0,25 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$

ΘΕΜΑ 3^ο

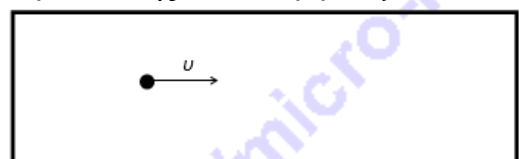
Γ.1. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ελαστική χορδή μήκους L στην οποία τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα v . Τα δύο άκρα της χορδής είναι ακλόνητα στερεωμένα.

Γ.1.1. Στο ίδιο σχήμα να σχεδιάσετε 4 στάσιμα κύματα που μπορούν να συντηρηθούν στη χορδή ξεκινώντας από ένα στάσιμο κύμα με δύο συνολικά δεσμούς και μια κοιλία και αυξάνοντας στη συνέχεια το πλήθος των κοιλιών κάθε φορά κατά μία.

Γ.1.2. Δείξτε ότι αν n είναι το πλήθος των κοιλιών του στάσιμου κύματος, τότε μόνο στάσιμα κύματα με συχνότητες $f_n = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L}$ μπορούν να εμφανιστούν στη χορδή (δηλαδή οι συχνότητες των στάσιμων κυμάτων που μπορούν να συντηρηθούν στη χορδή είναι κβαντισμένες).

Γ.1.3. Αν η χορδή ήταν απείρου μήκους, θα υπήρχε περιορισμός (κβάντωση) στις συχνότητες των στάσιμων κυμάτων που θα μπορούσαν να εμφανιστούν;

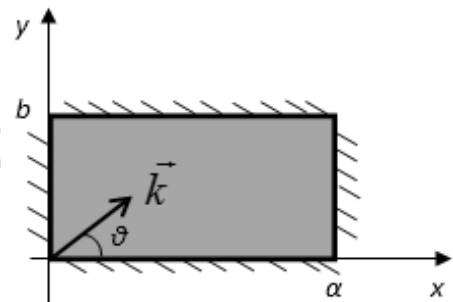
Γ.2. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδέα της κβάντωσης, που εμφανίζεται κάθε φορά που επιβάλλουμε περιορισμό στο μήκος της χορδής, στην περίπτωση ενός σωματιδίου (π.χ. ηλεκτρονίου) μάζας m , που είναι παγιδευμένο και κινείται με ταχύτητα v σε ένα κουτί πλάτους L , όπως φαίνεται στο σχήμα.





Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε σωματίδιο εμφανίζει και κυματικά χαρακτηριστικά με μήκος κύματος λ , το οποίο, σύμφωνα με τη θεωρία του deBroglie, συνδέεται με την ορμή p του σωματιδίου και με τη σταθερά h του Planck με τη σχέση $\lambda = \frac{h}{p}$, βρείτε μια μαθηματική έκφραση για τις επιτρεπόμενες τιμές ενέργειας E για το σωματίδιο.

Γ.3. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια ιδέα, με αυτή που χρησιμοποιήσαμε στη χορδή με σταθερά άκρα, για να προσδιορίσουμε τα στάσιμα κύματα που εμφανίζονται σε μια δισδιάστατη μεμβράνη που έχει τη μορφή ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με διαστάσεις a και b , η περιφέρεια της οποίας είναι στερεωμένη ώστε να παραμένει διαρκώς ακίνητη (βλ. σχ.).



Χρησιμοποιώντας το λεγόμενο κυματόνυσμα, του οποίου το μέτρο δίνεται από τη σχέση $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$, όπου λ

το μήκος κύματος, ενώ η κατεύθυνσή του $\vec{k}$ ορίζει την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος, δείξτε ότι οι επιτρεπτές συχνότητες των στάσιμων κυμάτων δίνονται από την εξίσωση

$$f = \frac{v}{2} \cdot \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}.$$

όπου n και m φυσικοί, ανεξάρτητοι μεταξύ τους αριθμοί, και v η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

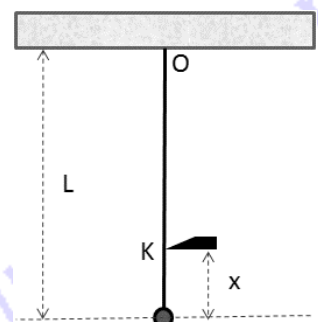
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Υλικό σημείο μάζας m προσδένεται στο άκρο αβαρούς ανελαστικού νήματος μήκους L , το άλλο άκρο του οποίου αναρτάται από την οροφή του εργαστηρίου σε σημείο έστω O . Το σύστημα αφήνεται να ηρεμήσει. Στη συνέχεια το εκτρέπουμε από την θέση ισορροπίας, διατηρώντας το νήμα τεντωμένο, έτσι ώστε αυτό να σχηματίζει μικρή γωνία θ ($\theta \leq 4^\circ$) με τον αρχικό του προσανατολισμό και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί.

Δ.1. Λαμβάνοντας υπόψη ότι για μικρές τιμές της θ ισχύει $\eta\mu\theta \cong \theta$ ή/και ότι το τόξο θ μπορεί να προσεγγιστεί από την αντίστοιχη χορδή, να αποδείξετε ότι το σύστημα εκτελεί

Γ.Α.Τ. και να αποδείξετε τη σχέση $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ όπου T η περίοδος του εκκρεμούς, L το μήκος του νήματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας στον τόπο διεξαγωγής του πειράματος, η οποία θεωρούμε ότι έχει τιμή $9,8 \text{ m/s}^2$.

Δ.2. Τροποποιούμε την πειραματική διάταξη έτσι ώστε τη στιγμή που το νήμα διέρχεται από την κατακόρυφο να συναντά ακίδα σε σημείο K που απέχει κατά x από το κάτω άκρο του νήματος (βλ. σχ.). Συνεπώς το σύστημα εκτελεί αιώρηση με κέντρο i) το K όσο





**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

το m κινείται στο δεξί ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ΟΚ και ii) το Ο όταν κινείται στα αριστερά της ΟΚ. Να βρείτε μια έκφραση της περιόδου T συναρτήσει των μεγεθών L , x και g .

Δ.3. Για διάφορες τιμές της απόστασης x εκτελούμε μετρήσεις της περιόδου T του εκκρεμούς, τις οποίες συγκεντρώνουμε στον πίνακα που θα βρείτε στο Φύλλο Απαντήσεων. Αφού τις τιτλοδοτήσετε, να συμπληρώσετε με τις κατάλληλες τιμές, όσες από τις κενές στήλες του πίνακα κρίνετε απαραίτητες, ώστε να εφαρμόσετε τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.) και να υπολογίσετε τις τιμές των a και β (βλ. σημείωση που ακολουθεί).

Δ.4. Να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματά σας, για να υπολογίσετε το μήκος L του νήματος, που χρησιμοποιήθηκε στο συγκεκριμένο πείραμα. Για τους υπολογισμούς σας να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $\pi \cong 3,14159$.

Δ.5. Να σχεδιάσετε σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες τα πειραματικά δεδομένα και να χαράξετε την ευθεία που προκύπτει από την εφαρμογή της Μ.Ε.Τ.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ για τη Μ.Ε.Τ.: Έστω ότι έχουμε μετρήσει N ζεύγη τιμών των φυσικών μεγεθών x και y και βρήκαμε τις τιμές x_i και y_i , όπου $i=1,2,3, \dots, N$. Αν γνωρίζουμε ότι τα μεγέθη x και y συνδέονται με τη σχέση $y = a + \beta \cdot x$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών a και β , χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

$$\beta = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

Καλή Επιτυχία



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

Όνομα και Επώνυμο:
Όνομα Πατέρα: Όνομα Μητέρας:
Σχολείο: Τάξη / Τμήμα:
Εξεταστικό Κέντρο:

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1.1. Ορθή είναι η επιλογή

A.1.2. $\Delta\phi =$

A.2. Ορθή είναι η επιλογή

ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

A.3. (καθαρογράψτε την απόδειξή σας στο χώρο που ακολουθεί)



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

ΘΕΜΑ 2^ο

B.1. $v_2 = \dots\dots\dots$ $v_\chi = \dots\dots\dots$

B.2. $\beta = \dots\dots\dots$ $\mu_s = \dots\dots\dots$

ΘΕΜΑ 3^ο

Γ.1.1. (σχεδιάστε το σχήμα στο χώρο που ακολουθεί)

Γ.1.2. (γράψτε την απόδειξη στις επόμενες γραμμές)

Γ.1.3. Αν η χορδή ήταν απείρου μήκους (αναπτύξτε την απάντησή σας στις επόμενες γραμμές)

Γ.2. $E = \dots\dots\dots$

Γ.3. (καθαρογράψτε την απόδειξή σας στο χώρο που ακολουθεί)



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**

Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής



ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Δ.1. (καθαρογράψτε την απόδειξή σας στο χώρο που ακολουθεί)



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

Δ.2. $T = \dots\dots\dots$

Δ.3.

x (m)	T (s)					
0,25	1,68					
0,30	1,75					
0,35	1,79					
0,40	1,81					
0,45	1,88					
0,50	1,91					
0,55	1,93					
0,60	1,95					
0,65	1,98					
0,70	2,05					

Αποτελέσματα Μ.Ε.Τ. $\alpha = \dots\dots\dots$, $\beta = \dots\dots\dots$

Δ.4.

$L = \dots\dots\dots$



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**

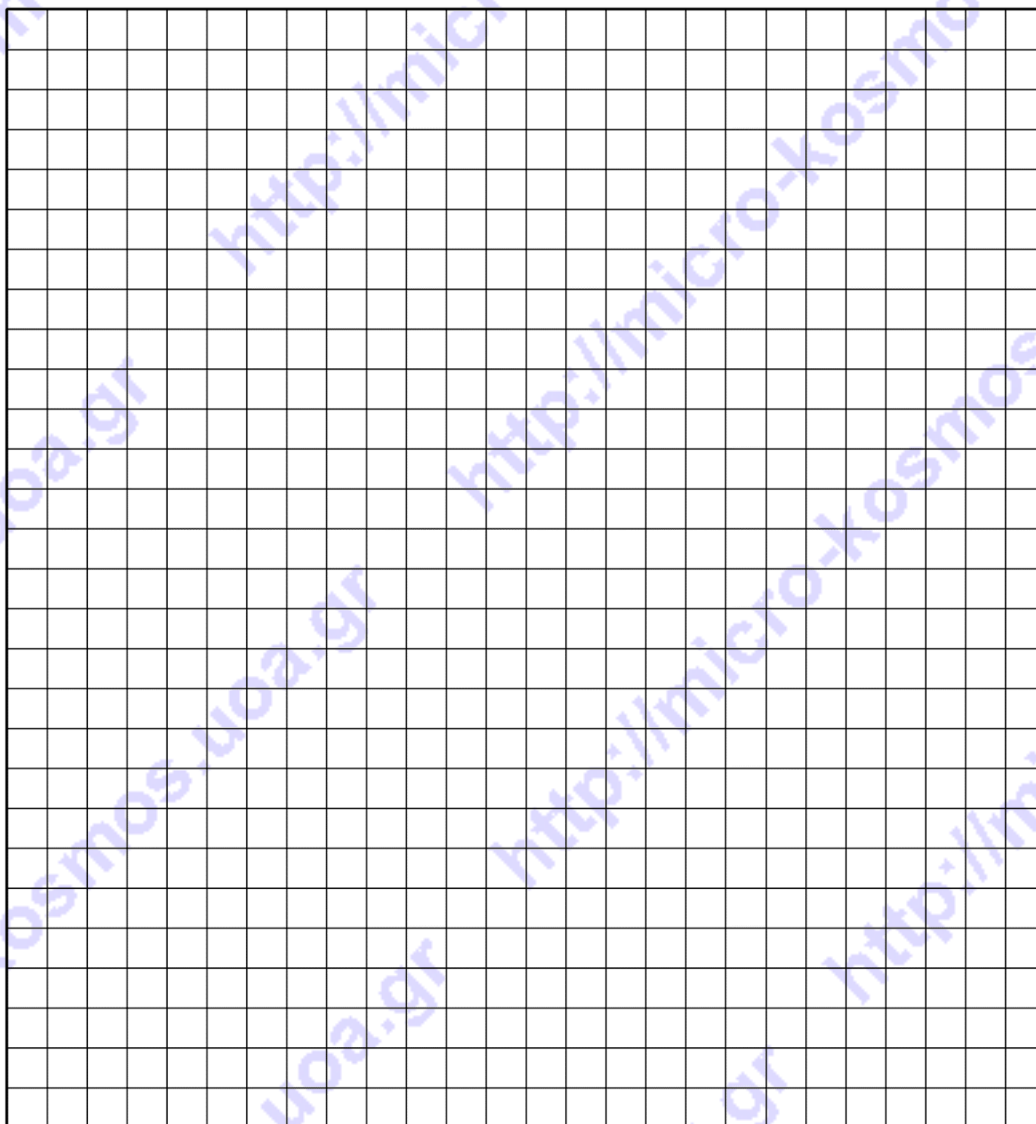


Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

Δ.5.



Πειραματικά δεδομένα και ευθεία από Μ.Ε.Τ.



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

Συνοπτικές Απαντήσεις

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1.

A.1.1. (β)

$$f = 1/T = (1/60) 10^3 \text{ Hz} = 100/6 \text{ Hz}$$

$$\lambda = v/f = 20 \times 6 / 100 = 1,2 \text{ m}$$

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\pi (100 - 80) 10^{-2} / 1,2 \text{ rad} = \pi/3 \text{ rad}$$

A.1.2. Σχηματίζεται στάσιμο κύμα

$$\text{Θέσεις δεσμών: } x_k = (2k+1) \lambda/4 = 0,3 (2k+1) \text{ m}$$

$$x_0 = 0,3 \text{ m}$$

$$x_1 = 0,9 \text{ m}$$

$$x_2 = 1,5 \text{ m}$$

Τα σημεία 8 και 10 βρίσκονται στις θέσεις 0,8 m και 1 m αντίστοιχα. Δηλαδή βρίσκονται εκατέρωθεν του δεσμού ο οποίος βρίσκεται στη θέση 0,9 m.

Άρα έχουν διαφορά φάσης π .

A.2. Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων A και B:

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_B$$

Αφού ο σωλήνας είναι οριζόντιος ισχύει $y_A = y_B$. Εξ άλλου τα, εκτεθειμένα στην ατμόσφαιρα, σημεία A και B υπόκεινται στην ατμοσφαιρική πίεση. Άρα η σχέση απλοποιείται στη μορφή:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

Απ' όπου καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$v = v_1$$

Με ανάλογο τρόπο για τα σημεία Γ και Δ παίρνουμε:

$$v = v_2$$

$$\text{Άρα } v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{1}$$

Σωστή λοιπόν είναι η απάντηση (δ).

A.3. Από την αρχική έκφραση έχουμε:

$$\Delta K = -\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\vec{V} - \vec{u}_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\vec{V} - \vec{u}_2)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (V^2 + u_1^2 - 2 \cdot \vec{V} \cdot \vec{u}_1) - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (V^2 + u_2^2 - 2 \cdot \vec{V} \cdot \vec{u}_2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + m_1 \cdot \vec{V} \cdot \vec{u}_1 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot V^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 + m_2 \cdot \vec{V} \cdot \vec{u}_2 =$$



Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

$$= -\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot V^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 + (m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2) \cdot \vec{V} \quad (1)$$

Από διατήρηση ορμής όμως προκύπτει:

$$m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{V}$$

οπότε η (1) γίνεται:

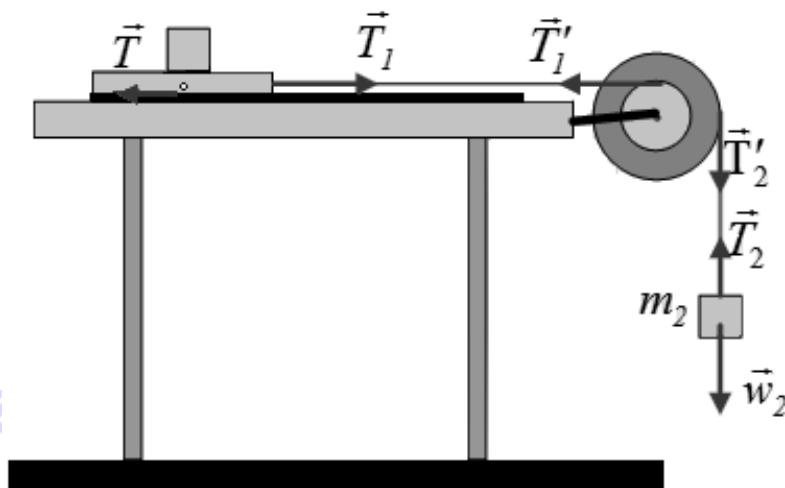
$$\Delta K = -\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot V^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 + (m_1 + m_2) \cdot V^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot V^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$$

έκφραση που δίνει την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

ΘΕΜΑ 2^ο

Β.1. Μόλις το σώμα μάζας m_2 αποκτήσει **σταθερή** ταχύτητα, θα ισχύει: $\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow m_2 g = T_2$



Τότε όμως και η διπλή τροχαλία θα στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, οπότε:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T_2' R - T_1' r = 0 \Rightarrow T_2' R = T_1' r \Rightarrow m_2 g 2r = T_1' r \Rightarrow T_1' = 2m_2 g$$



Προφανώς και η πλάκα θα έχει αποκτήσει σταθερή ταχύτητα, οπότε:

$$\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow T_1 = T \Rightarrow 2m_2 g = nA \frac{v_1}{l} \Rightarrow v_1 = \frac{2m_2 g l}{nA} \Rightarrow v_1 = 0,8 \frac{m}{s}$$

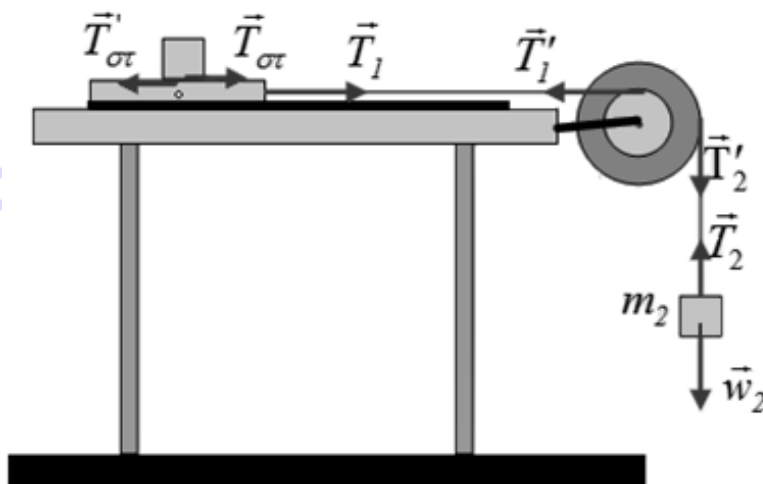
Εφόσον τα σχοινιά δεν γλιστράνε στις τροχαλίες ισχύει: $v_1 = \omega r$ Διαιρώντας έχουμε:
 $v_2 = \omega 2r$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_2 = 2v_1 \Rightarrow v_2 = 1,6 \frac{m}{s}$$

Επειδή τα νευτώνεια ρευστά εμφανίζουν γραμμική εξάρτηση της ταχύτητας ροής με την απόσταση

γ από την ακίνητη επιφάνεια, ισχύει: $\frac{v_x}{y} = \frac{v_1}{l} \Rightarrow v_x = v_1 \frac{y}{l} \Rightarrow v_x = 0,3 \frac{m}{s}$

B.2. Η κλίση είναι η στιγμιαία επιτάχυνση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η πλάκα δεν έχει ταχύτητα και δεν δέχεται τριβή από το μηχανέλαιο. Εφόσον το σώμα Σ δεν ολισθαίνει ως προς την πλάκα, έχει την ίδια επιτάχυνση $\vec{a}_1$ με την πλάκα, για την οποία ισχύει: $a_1 = a_{\gamma\omega\nu} r$ όπου $a_{\gamma\omega\nu}$ η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας. Την ίδια στιγμή το σώμα μάζας m_2 έχει επιτάχυνση $a_2 = a_{\gamma\omega\nu} 2r$



$$T_1 = (m_1 + m_\Sigma) a_{\gamma\omega\nu} r$$

Έχουμε ότι:

$$T_2 2r - T_1 r = M r^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow 2T_2 - T_1 = M r a_{\gamma\omega\nu}$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_{\gamma\omega\nu} 2r \Rightarrow 2m_2 g - 2T_2 = 4m_2 a_{\gamma\omega\nu} r$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2m_2 g = (m_1 + m_\Sigma + M + 4m_2) a_{\gamma\omega\nu} r \Rightarrow a_1 = \frac{2m_2 g}{m_1 + m_\Sigma + M + 4m_2} \Rightarrow a_1 = 1 \frac{m}{s^2}$$



Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

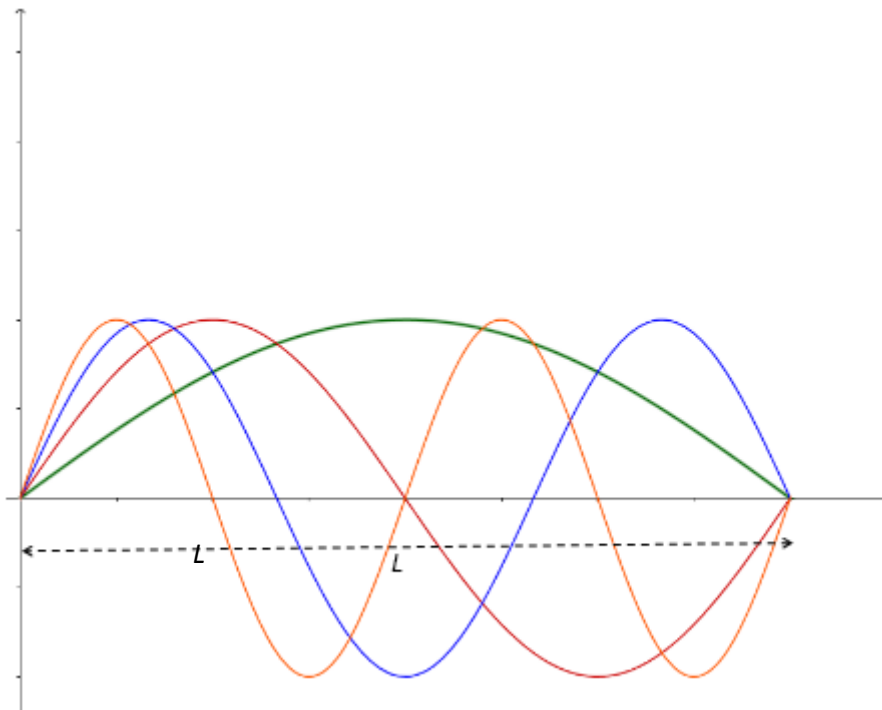
11/03/2017

Από το διάγραμμα της ταχύτητας βλέπουμε ότι έχει τη μέγιστη κλίση τη στιγμή $t=0$, οπότε το σώμα Σ έχει μέγιστη επιτάχυνση την ίδια στιγμή και δέχεται τη μέγιστη στατική τριβή

Για το σώμα Σ ισχύει: $\Sigma F_1 = T_{\sigma\tau} = m_{\Sigma} a_1 \leq T_{op} = \mu_s m_{\Sigma} g \Rightarrow \mu_s \geq \frac{a_1}{g} = 0,1$

ΘΕΜΑ 3^ο

Γ.1. Τα 4 πρώτα κύματα φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



Το πιο απλό κύμα (πράσινο) έχει μια κοιλία $n=1$ και είναι: $\frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot L}{1}$.

Το επόμενο (κόκκινο) έχει δύο κοιλίες $n=2$ και είναι: $\lambda = L \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot L}{2}$.

Το επόμενο (μπλε) έχει τρεις κοιλίες $n=3$ και είναι: $\lambda + \frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow 3 \cdot \frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot L}{3}$.

Το τελευταίο (πορτοκαλί) έχει τέσσερις κοιλίες $n=4$ και είναι: $2 \cdot \lambda = L \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot L}{4}$.



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**

Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής



ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

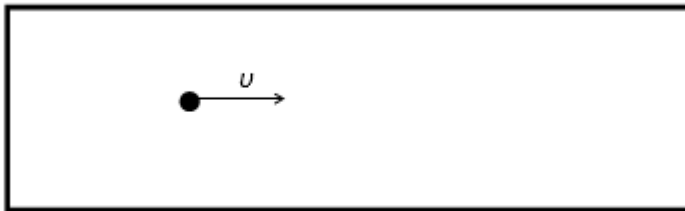
11/03/2017

Παρατηρώ ότι τα στάσιμα κύματα, που μπορούν να συντηρηθούν, έχουν μήκη κύματος που είναι κβαντισμένα και υπακούουν στη σχέση:

$$\lambda_n = \frac{2 \cdot L}{n} \stackrel{v=\lambda \cdot f}{\Rightarrow} \frac{v}{f_n} = \frac{2 \cdot L}{n} \Rightarrow f_n = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L} \quad n=1,2,3\ldots$$

Στην περίπτωση που η χορδή είχε άπειρο μήκος δεν θα υπήρχε περιορισμός στις συχνότητες των στάσιμων κυμάτων που θα μπορούσαν να συντηρηθούν στη χορδή.

Γ.2. Καθώς το σωματίδιο κινείται στο κουτί και ανακλάται στα τοιχώματά του μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε τη δημιουργία ενός στάσιμου κύματος.



Κλασική
εικόνα



Κβαντική εικόνα (ένα
από τα πολλά
στάσιμα κύματα)

Όπως και προηγουμένως, και με δεδομένο ότι τα άκρα του κουτιού είναι σταθερά, προκύπτει ότι τα επιτρεπτά μήκη κύματος είναι:

$$\lambda = \frac{2 \cdot L}{n}$$

όπου n φυσικός αριθμός.

Όμως θα πρέπει:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \frac{2 \cdot L}{n} = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{2 \cdot L} \cdot n$$

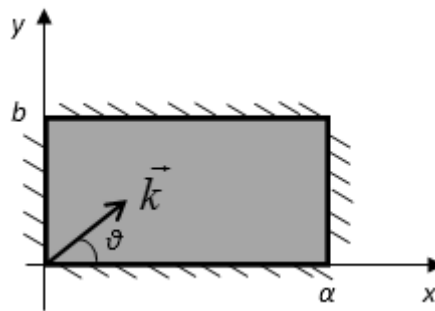


Καθώς η ενέργεια του σωματιδίου είναι μόνο κινητική ισχύει:

$$E = K = \frac{p^2}{2 \cdot m} \Rightarrow E = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} n^2$$

εξίσωση που δίνει τις επιτρεπτές (κβαντισμένες) ενεργειακές στάθμες του σωματιδίου που είναι περιορισμένο μέσα στο κουτί.

Γ.3.



Αναλύοντας το κυμαάνυσμα έχω για τις δύο συνιστώσες:

$$k_x = k \cdot \sigma \nu \vartheta \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_x} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \sigma \nu \vartheta \Rightarrow \lambda_x = \frac{\lambda}{\sigma \nu \vartheta} \Rightarrow \sigma \nu \vartheta = \frac{\lambda}{\lambda_x} \quad (1)$$

και

$$k_y = k \cdot \eta \mu \vartheta \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_y} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \eta \mu \vartheta \Rightarrow \lambda_y = \frac{\lambda}{\eta \mu \vartheta} \Rightarrow \eta \mu \vartheta = \frac{\lambda}{\lambda_y} \quad (2)$$

όπου λ_x και λ_y είναι οι προβολές του μήκους κύματος στους αντίστοιχους άξονες. Προφανώς, ξεχωριστά για καθεμία από αυτές τις προβολές θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη που ικανοποιούσε προηγουμένως το μήκος κύματος για τη μια διάσταση. Θα πρέπει λοιπόν να είναι:

$$\lambda_{x,n} = \frac{2 \cdot a}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

και



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

$$\lambda_{y,m} = \frac{2 \cdot b}{m} \quad m=1,2,\dots \quad (4)$$

Είναι τώρα:

$$\sigma \nu^2 \vartheta + \eta \mu^2 \vartheta = 1 \xRightarrow{(1)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_x} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_y} \right)^2 = 1 \xRightarrow{(2)} \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} = \frac{1}{\lambda^2} \xRightarrow{(3)} \frac{n^2}{4 \cdot a^2} + \frac{m^2}{4 \cdot b^2} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \quad (5)$$

Για την ταχύτητα διάδοσης του κύματος, το μήκος κύματος και τη συχνότητα εξακολουθεί να ισχύει η σχέση $\nu = \lambda \cdot f$, οπότε είναι:

$$\nu^2 = \lambda^2 \cdot f^2 \Rightarrow f^2 = \frac{\nu^2}{\lambda^2} \xRightarrow{(5)} f^2 = \nu^2 \cdot \left(\frac{n^2}{4 \cdot a^2} + \frac{m^2}{4 \cdot b^2} \right) \Rightarrow f^2 = \frac{\nu^2}{4} \cdot \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{\nu}{2} \cdot \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \quad n=1,2,\dots \text{ και } m=1,2,\dots$$

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Δ.1. Σε κύκλο ακτίνας $R = L$ χαράσσουμε επίκεντρη γωνία θ , η οποία βαίνει σε τόξο μήκους έστω s (βλ. σχ.). Έστω ακόμη $2x$ το μήκος της αντίστοιχης χορδής. Από το τρίγωνο ΑΜΟ έχουμε:

$$AM = L \eta \mu \frac{\theta}{2} \Rightarrow x = L \eta \mu \frac{\theta}{2}$$

Με βάση την επισήμανση της εκφώνησης, και με την προϋπόθεση ότι η γωνία θ είναι επαρκώς μικρή, έχουμε:

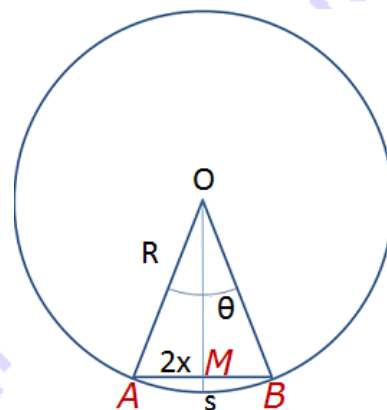
$$x = L \frac{\theta}{2} \Rightarrow 2x = L \theta$$

Εξ άλλου από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$s = R \theta$$

με την προϋπόθεση ότι η γωνία μετρείται σε ακτίνια.

Άρα πράγματι, για μικρές τιμές της γωνίας, μπορούμε να προσεγγίσουμε το τόξο με την αντίστοιχη χορδή, δηλ.





Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

$$2x \cong s$$

Εκτρέπουμε το εκκρεμές από την κατακόρυφο κατά μικρή γωνία θ και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί, υπό την επίδραση της συνιστώσας του βάρους w_x , για την οποία ισχύει:

$$w_x = w \eta \mu \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

Η κίνηση του σώματος είναι κατά προσέγγιση γραμμική, αφού, όπως αποδείξαμε, αντί του τόξου s μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη χορδή $2x$. Εξ άλλου η (1) γράφεται:

$$w_x = w \frac{x}{L} \Rightarrow w_x = \frac{mg}{L} x \quad (2)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και με αντίθετο πρόσημο από αυτή, αφού όταν η εκτροπή του σώματος είναι προς τα αριστερά, η συνιστώσα w_x έχει φορά (στο πλαίσιο της προσέγγισής) προς τα δεξιά.

Εναλλακτικά, με βάση την προσέγγιση $\eta \mu \theta \cong \theta$, η (1) γράφεται:

$$w_x \cong w \frac{\theta}{2} \quad (3)$$

από την οποία προκύπτει:

$$w_x \cong w \frac{s}{2L} = w \frac{x}{L} = \frac{mg}{L} x \quad (4)$$

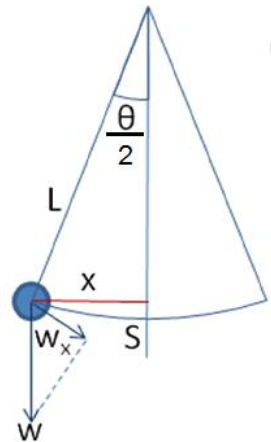
Δηλαδή καταλήγουμε σε μορφή όμοια με την (2).

Εφόσον ικανοποιείται το σχετικό κριτήριο, συμπεραίνουμε ότι η κίνηση είναι Γ.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς:

$$D = \frac{mg}{L} \quad (5)$$

και περίοδο:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L}}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (6)$$





Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

Δ.2. Θεωρούμε τη μισή αιώρηση (δεξιά του Κ) η οποία ολοκληρώνεται, με βάση το αποτέλεσμα του Δ1, σε χρόνο $t_1 = \pi \sqrt{\frac{x}{g}}$. Αντίστοιχα, η άλλη μισή ολοκληρώνεται σε χρονικό διάστημα $t_2 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$. Άρα, μια πλήρης αιώρηση διαρκεί

$$T = t_1 + t_2 \Rightarrow T = \pi \left(\sqrt{\frac{x}{g}} + \sqrt{\frac{L}{g}} \right).$$

Δ.3. Η προηγούμενη σχέση είναι της μορφής $y = b\sqrt{x} + a$ με

$$b = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \quad (7)$$

και

$$a = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (8)$$

Συμπληρώνουμε τον πίνακα των μετρήσεων με τις τιμές $\sqrt{x}$ και $\sqrt{x} \cdot T$:

x (m)	T (s)	$\sqrt{x}$ ($\sqrt{m}$)	$\sqrt{x} \cdot T$ ($\sqrt{m} \cdot s$)
0,25	1,68	0,5	0,84
0,30	1,75	0,55	0,96
0,35	1,79	0,59	1,06
0,40	1,81	0,63	1,14
0,45	1,88	0,67	1,26
0,50	1,91	0,71	1,36
0,55	1,93	0,74	1,43
0,60	1,95	0,77	1,50
0,65	1,98	0,81	1,60
0,70	2,05	0,84	1,72

Απ' όπου βρίσκουμε:

$$\sum_{i=1}^{10} \sqrt{x_i} = 6,81 \quad \sum_{i=1}^{10} T_i = 18,73 \quad \sum_{i=1}^{10} (\sqrt{x_i})^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i = 4,75 \quad \sum_{i=1}^{10} \sqrt{x_i} T_i = 12,87$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους της Μ.Ε.Τ. προκύπτει:

$$a \cong 1,18$$



**Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής**



Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

11/03/2017

και

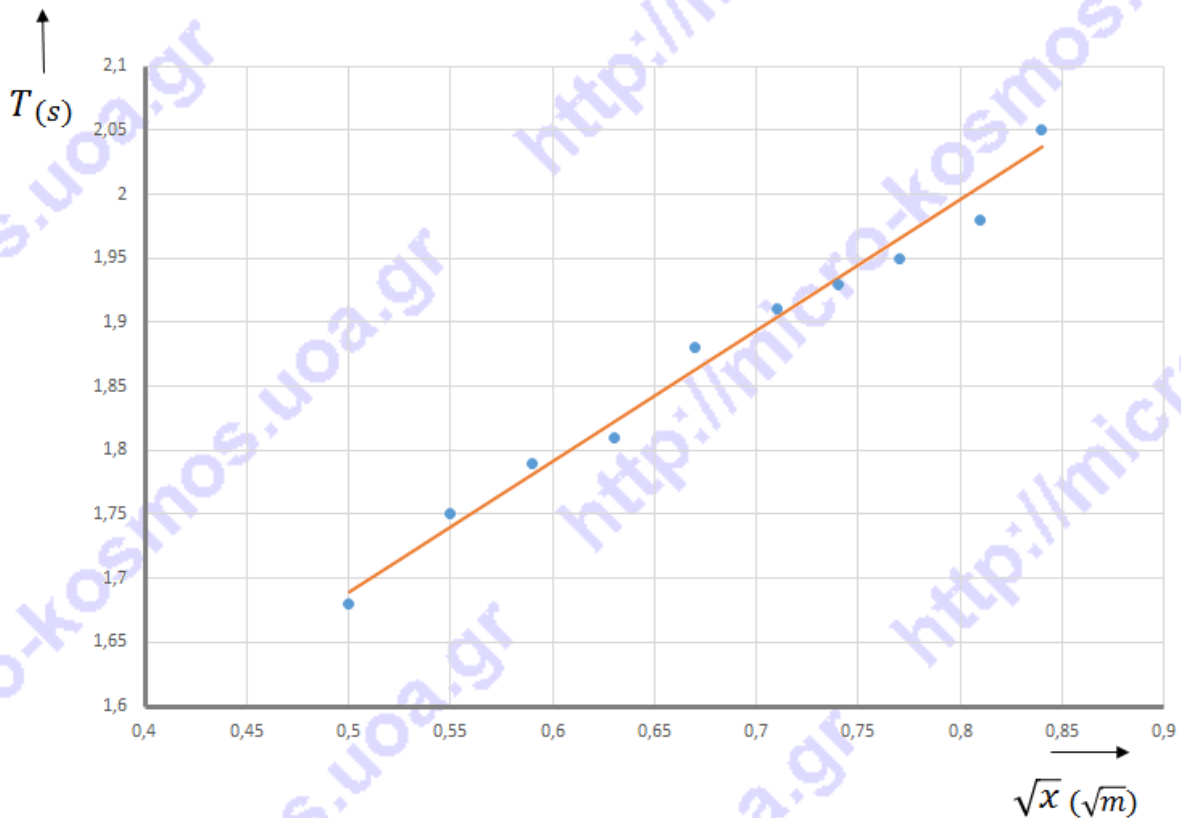
$$b \cong 1,02$$

Δ.4. Από τη σχέση (8) για το a , λύνουμε στη μορφή:

$$L = \frac{a^2 g}{\pi^2}$$

που οδηγεί στην τιμή $L \cong 1,38m$.

Δ.5. Το γράφημα των πειραματικών τιμών ακολουθεί.



Σε αυτό απεικονίζεται επίσης η γραφική παράσταση της ευθείας $T = 1,02\sqrt{x} + 1,18$.